ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 14 August 1934 Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Spannungszustände und projektive Transformationen.

Von *Robert Sauer* in Aachen.

Die bekannte „Dualität“ zwischen Lageplan und Kräfteplan eines Fachwerks läßt sich auf die Differentialgeometrie übertragen und führt dort zu einem „dualen“ Entsprechen der Sätze über infinitesimale Verbiegungen von Flächenhäuten und über Spannungsverteilungen in Membranen. Diese Beziehungen wurden erstmals von W. Blaschke[1]) deutlich erkannt und später von M. Lagally[2]) weiter untersucht und geklärt. Vor kurzem habe ich nun projektive Fragen der infinitesimalen Flächenverbiegung untersucht[3]) und eine einfache Methode gefunden, um aus den infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche die infinitesimalen Verbiegungen der zu ihr projektiven Flächen[4]) zu berechnen. Die duale Übertragung dieser Methode liefert einen auch für die praktische Durchrechnung sehr einfachen Weg, um aus den Spannungsverteilungen einer Membran die Spannungsverteilungen der zu ihr projektiven Membranen zu gewinnen. Im I. Abschnitt der vorliegenden Arbeit werde ich diese Untersuchungen für unebene und ebene Membranen durchführen und durch Hinzunahme äußerer Kräfte noch verallgemeinern; der II. Abschnitt behandelt das entsprechende Problem für räumliche Spannungsfelder.

Die Arbeit ist so geschrieben, daß sie auch für flächentheoretisch wenig interessierte Leser und ohne Kenntnis der zitierten Abhandlungen verständlich ist. An zwei einfachen Beispielen wird das Problem verdeutlicht.

I. Unebene und ebene Membranen.

1. Bezeichnungen. Auf eine vorgegebene Membran wirken längs des Randes und in den einzelnen Flächenelementen vorgegebene Kräfte (Rand- bzw. Flächenkräfte); diese sollen sich im Gleichgewicht befinden mit den von ihnen in der Membran hervorgerufenen Tangentialspannungen. Ich setze zunächst die Membran als uneben voraus und werde die ebenen Membranen als Ausartung der unebenen in Nr. 6 behandeln.

[1]) W. Blaschke: Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut, Int. Congr. of Math. Cambridge 1912, Proceedings 2 (1913), S. 291—294.

[2]) M. Lagally: Über Spannung und elastische Deformation unebener Membranen, ZAMM 4 (1924), S. 377 bis 383.

[3]) R. Sauer: Wackelige Kurvennetze bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung, Math. Ann. 1933, S. 673 bis 693; R. Sauer: Krümmungsfeste Kurven bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung, Math. Zeitschrift 38 (1934), S. 468 bis 475.

[4]) Vgl. hierzu auch G. Darboux: Théorie des surfaces IV (1896), S. 78.

Wir denken uns die Membran als Fläche $w=1$ in ein Gewebe dreier Flächenscharen $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, $w=\text{const}$ eingebettet; die Flächen $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ schneiden die Membran $w=1$ nach zwei Kurvenscharen. Das Flächengewebe soll so gewählt sein, daß in der Umgebung der Membran u, v, w als krummlinige Koordinaten der Raumpunkte benutzt werden können. Dann ist der Ortsvektor eines Raumpunktes eine eindeutige Vektorfunktion $\mathfrak{x}(u, v, w)$; insbesondere liefert $\mathfrak{x}(u, v, 1)$ die Punkte der Membran.

Die 6 Flächen u, $u+du$, v, $v+dv$, w, $w+dw$ schließen ein elementares „Parallelflach" ein, das im Falle $w=1$ mit der Seitenfläche $(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\,du\,dv$ der Membran anliegt (Abb. 1); die beiden Kanten $\mathfrak{x}_u\,du$, $\mathfrak{x}_v\,dv$ liegen in der Membran, die dritte vom Punkt $u/v/w$ ausgehende Kante $\mathfrak{x}_w\,dw$ tritt aus der Membran heraus. Jedem Membranpunkt ordnen wir nun das durch $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{x}_w$ bestimmte i. a. schiefwinkelige Koordinatensystem zu, wobei die Einheitspunkte auf den Koordinatenachsen die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{x}_w$ sein sollen. Auf dieses von Punkt zu Punkt verschiedene Koordinatensystem beziehen wir die Flächenkräfte und die Spannungen durch den Ansatz

$$\left.\begin{array}{l} (p\,\mathfrak{x}_u + q\,\mathfrak{x}_v + r\,\mathfrak{x}_w)\,du\,dv = \text{Flächenkraft auf das Flächenelement } (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\,du\,dv, \\ \left.\begin{array}{l}(\sigma^{11}\,\mathfrak{x}_v + \sigma^{12}\,\mathfrak{x}_u)\,du \\ (\sigma^{21}\,\mathfrak{x}_v + \sigma^{22}\,\mathfrak{x}_u)\,dv\end{array}\right\} = \text{Spannung am Linienelement } \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{x}_u\,du \\ \mathfrak{x}_v\,dv\end{array}\right. \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (1),$$

welche von der umgebenden Membran auf das Flächenelement $(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\,du\,dv$ wirkt. Die Randkräfte können im Gleichgewichtszustand als Spannungen angesetzt werden. Die Zeiger der σ^{ik} sind oben angebracht, um später nicht durch die Differentiationszeiger u, v gestört zu werden.

Die Spannungen $\sigma^{12}\,\mathfrak{x}_u\,du$ und $\sigma^{21}\,\mathfrak{x}_v\,dv$ sind S c h u b s p a n n u n g e n; $\sigma^{11}\,\mathfrak{x}_v\,du$ und $\sigma^{22}\,\mathfrak{x}_u\,dv$ werde ich als Q u e r s p a n n u n g e n bezeichnen. Wenn die Parameterkurven ein Orthogonalsystem bilden, greifen die Querspannungen senkrecht am Linienelement an.

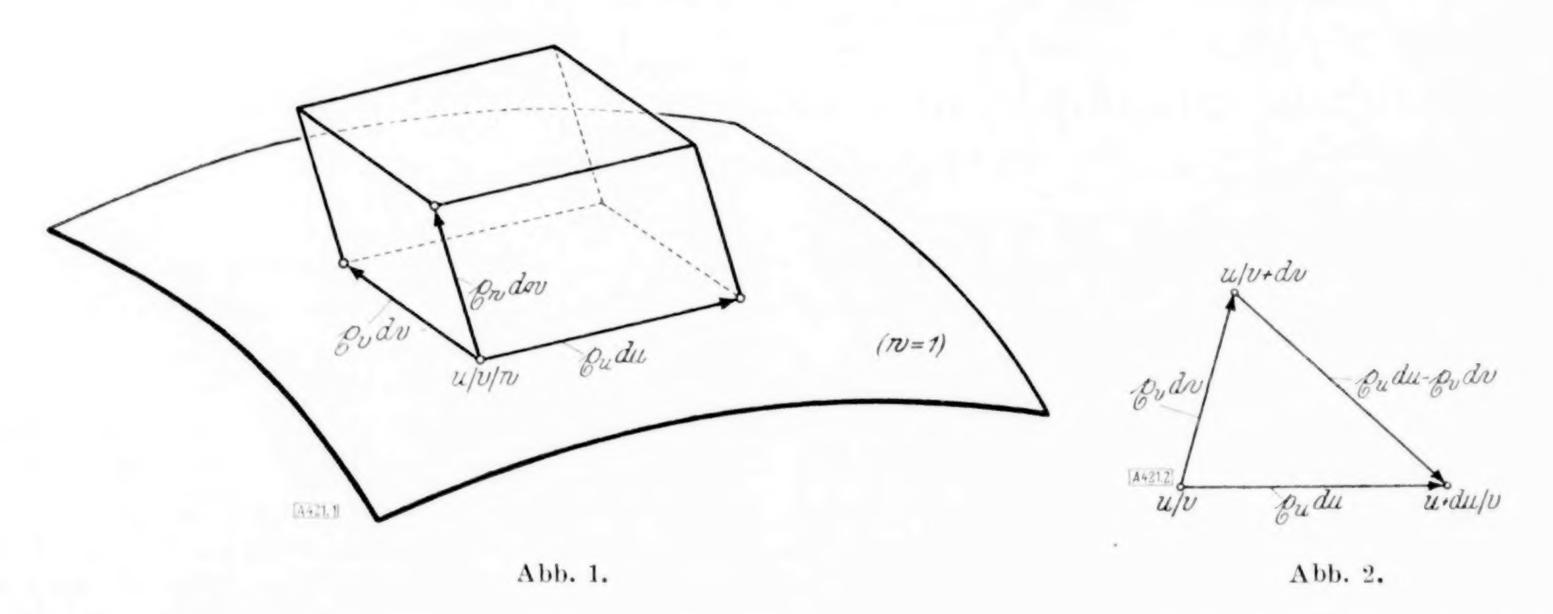


Abb. 1. Abb. 2.

Aus den Spannungen an den Linienelementen $\mathfrak{x}_u\,du$, $\mathfrak{x}_v\,dv$ erhält man die an einem beliebigen Linienelement $\mathfrak{x}_u\,du - \mathfrak{x}_v\,dv$ (vom Punkt $u/v+dv$ zum Punkt $u+du/v$; vgl. Abb. 2) wirkende Spannung durch Vektoraddition $(\sigma^{11}\,\mathfrak{x}_v + \sigma^{12}\,\mathfrak{x}_u)\,du + (\sigma^{21}\,\mathfrak{x}_v + \sigma^{22}\,\mathfrak{x}_u)\,dv$. Die Spannungsverteilung in der Membran ist also durch die σ^{ik} vollständig festgelegt.

Für die praktische Durchführung ist es nötig, die Flächenkräfte und die Spannungen auf die Flächen- bzw. Längeneinheit zu reduzieren und auf die Einheitsvektoren $\dfrac{\mathfrak{x}_u}{|\mathfrak{x}_u|}$, $\dfrac{\mathfrak{x}_v}{|\mathfrak{x}_v|}$, $\dfrac{\mathfrak{x}_w}{|\mathfrak{x}_w|}$ zu beziehen. Man erhält als reduzierte, auf Einheitsvektoren bezogene Komponenten der Flächenkräfte bzw. Spannungen (alle Quadratwurzeln positiv!)

$$\left.\begin{array}{l} P = p\,\dfrac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^{\,2}}}, \quad Q = q\,\dfrac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^{\,2}}}, \quad R = r\,\dfrac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^{\,2}}}, \\ \Sigma^{11} = \sigma^{11}\sqrt{\dfrac{g_{22}}{g_{11}}}, \quad \Sigma^{12} = \sigma^{12}, \quad \Sigma^{21} = \sigma^{21}, \quad \Sigma^{22} = \sigma^{22}\sqrt{\dfrac{g_{11}}{g_{22}}} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Dabei sind die in der Flächentheorie üblichen Abkürzungen benutzt: $g_{11} = \mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_u$, $g_{12} = \mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v$, $g_{22} = \mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_v$, $g_{33} = \mathfrak{x}_w\,\mathfrak{x}_w$.

2. Gleichgewichtsbedingungen. Das elementare „Parallelogramm" $(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\, du\, dv$ befindet sich im Gleichgewicht unter dem Einfluß der Flächenkraft $(p\,\mathfrak{x}_u + q\,\mathfrak{x}_v + r\,\mathfrak{x}_w)\, du\, dv$ und der an den Parallelogrammseiten wirkenden Spannungen. Der Flächensatz liefert

$$\sigma^{ik} = \sigma^{ki} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

und aus dem Schwerpunktsatz folgt dann die Vektorgleichung

$$\sigma^{11}\mathfrak{x}_{vv} + 2\,\sigma^{12}\mathfrak{x}_{uv} + \sigma^{22}\mathfrak{x}_{uu} + \sigma_v{}^{11}\mathfrak{x}_v + \sigma_v{}^{12}\mathfrak{x}_u + \sigma_u{}^{12}\mathfrak{x}_v + \sigma_u{}^{22}\mathfrak{x}_u + p\,\mathfrak{x}_u + q\,\mathfrak{x}_v + r\,\mathfrak{x}_w = 0 \quad . \quad (4).$$

Die skalare Multiplikation[5]) von (4) mit $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ bzw. $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_{uu}$ bzw. $\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{vv}$ ergibt die drei Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma^{11}\langle\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}\rangle + 2\,\sigma^{12}\langle\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}\rangle + \sigma^{22}\langle\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uu}\rangle + r\,\langle\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_w\rangle = 0,\\
&\sigma^{11}\langle\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_{vv}\rangle + 2\,\sigma^{12}\langle\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_{uv}\rangle - (\sigma_v{}^{11} + \sigma_u{}^{12})\langle\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uu}\rangle + q\,\langle\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_v\rangle + r\,\langle\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_w\rangle = 0,\\
&\sigma^{22}\langle\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}, \mathfrak{x}_{uu}\rangle + 2\,\sigma^{12}\langle\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}, \mathfrak{x}_{uv}\rangle - (\sigma_u{}^{22} + \sigma_v{}^{12})\langle\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{vv}\rangle + p\,\langle\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}, \mathfrak{x}_u\rangle + r\,\langle\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}, \mathfrak{x}_w\rangle = 0,
\end{aligned}\right\}\ (5).$$

Für orthogonale Parameterkurven spezialisieren sich die Gl. (5) zu den bekannten Gleichgewichtsbedingungen von L. Lecornu und E. Beltrami[2])[6]). Durch Integration der drei partiellen Differentialgleichungen (5) für die drei gesuchten Funktionen $\sigma^{ik}_{(u,\,v)}$ erhält man die mit den vorgegebenen Kräften im Gleichgewicht befindlichen Spannungsverteilungen der Membran.

3. Projektive Transformationen. An Stelle der kartesischen Koordinaten x, y, z führen wir homogene Koordinaten ein

$$x = \frac{\xi}{\vartheta}, \qquad y = \frac{\eta}{\vartheta}, \qquad z = \frac{\zeta}{\vartheta} \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Dadurch transformieren sich die Gl. (5) in

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma^{11}[\xi, \xi_u, \xi_v, \xi_{vv}] + 2\,\sigma^{12}[\xi, \xi_u, \xi_v, \xi_{uv}] + \sigma^{22}[\xi, \xi_u, \xi_v, \xi_{uu}] + r\,[\xi, \xi_u, \xi_v, \xi_w] = 0,\\
&\sigma^{11}[\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_{vv}] + 2\,\sigma^{12}[\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_{uv}] - \left(\sigma_v{}^{11} - 2\,\sigma^{11}\frac{\vartheta_v}{\vartheta} + \sigma_u{}^{12} - 2\,\sigma^{12}\frac{\vartheta_u}{\vartheta}\right)[\xi, \xi_u, \xi_v, \xi_{uu}]\\
&\qquad + q\,[\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_v] + r\,[\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_w] = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (7).$$

Die nicht hingeschriebene dritte Gleichung folgt aus der zweiten durch Vertauschung von 1 und 2, u und v, p und q. Die Ausdrücke [. . . .] bedeuten vierreihige Determinanten, in deren 2., 3. und 4. Zeile die zur angegebenen 1. Zeile analogen Glieder mit η, ζ und ϑ stehen.

Wir betrachten nun eine projektive Transformation: $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$, $\tilde{\vartheta}$ = Linearformen von ξ, η, ζ, ϑ mit konstanten Koeffizienten, deren Determinante nicht verschwindet. Ersetzt man ξ, η, ζ, ϑ durch $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$, $\tilde{\vartheta}$ und σ^{ik}, p, q, r durch $\tilde{\sigma}^{ik} = \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\right)^2 \sigma^{ik}$, $\tilde{p} = \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\right)^2 p$, $\tilde{q} = \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\right)^2 q$, $\tilde{r} = \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\right)^2 r$, so ändern sich die Determinanten [. . . .] um einen gemeinsamen nicht verschwindenden konstanten Faktor und die in (7) auftretenden Koeffizienten der Determinanten um den gemeinsamen Faktor $\left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\right)^2$.

Dies führt zu folgendem Ergebnis:

Aus einem Gleichgewichtszustand zwischen den Flächenkräften p, q, r, den Randkräften und den Tangentialspannungen σ^{ik} einer vorgegebenen Membran (M) läßt sich ein Gleichgewichtszustand für jede zu (M) projektive Membran $(\tilde{M})$ ableiten, indem man für $(\tilde{M})$ ansetzt[7])

$$\tilde{p} = \omega\, p, \quad \tilde{q} = \omega\, q, \quad \tilde{r} = \omega\, r, \quad \tilde{\sigma}^{ik} = \omega\, \sigma^{ik} \ \text{ mit } \omega = \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

---

[5]) Das skalare Produkt $(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y})\,\mathfrak{z}$ wird mit $\langle\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\rangle$ bezeichnet.

[6]) L. Lecornu: Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles, Journ. de l'Ecole polytechnique 29 (48), 1880; E. Beltrami: Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili, Mem. della Acc. di Bologna 4 (3), 1881; vgl. ferner B. Caldonazzo: Sulla meccanica delle superficie, Il Monitore tecnico 26 (1920), S. 5 bis 20; hier wird insbesondere gezeigt, daß die Gleichgewichtsbedingungen nicht nur für undehnbare Membranen gelten.

[7]) Bei der Transformation der reduzierten Kräfte und Spannungen (vgl. (2)) kommen neben ω noch Längen- und Flächenverzerrungen als Faktoren hinzu.

Geometrisch bedeutet $\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}$ den mit einer für alle Punkte gemeinsamen Zahl multiplizierten Abstand der Punkte der Membran (M) von der Fluchtebene, die bei der projektiven Transformation in die unendlich ferne Ebene abgebildet wird.

Spezialisiert sich die projektive Transformation zu einer affinen, so wird ω konstant, d. h. für jede zu (M) affine Membran $(\tilde{M})$ existiert ein Gleichgewichtszustand mit ungeänderten p, q, r, σ^{ik}; die reduzierten Kräfte und Spannungen ändern sich nach (2).

Unter der besonderen Annahme, daß keine äußeren Kräfte auftreten $(p = q = r = 0)$, ist der Inhalt dieser Nummer das mechanische Gegenstück zum flächentheoretischen Problem, die infinitesimalen Verbiegungen der zu einer gegebenen Fläche projektiven Flächen zu bestimmen[3])[4]).

4. Beispiel. Die vorgegebene Membran (M) sei die Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 + 1$; es bestehe Gleichgewicht zwischen einem konstanten, von innen her wirkenden Normaldruck (Flächenkraft) und einer isotropen Spannungsverteilung in der Kugelfläche. Durch $\tilde{x} = \frac{x}{z}$, $\tilde{y} = \frac{y}{z}$, $\tilde{z} = \frac{1}{z}$ wird die Kugel (M) transformiert in das zweischalige Drehhyperboloid $(\tilde{M})\ \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 + 1 = 0$. Nach Einführung der räumlichen Polarkoordinaten $x = w \cos u \cos v$, $y = w \cos u \sin v$, $z = w \sin u$ liefert die Übertragung des vorgegebenen Gleichgewichtszustandes der Membran (M) auf die projektive Membran $(\tilde{M})$ nach Nr. 3 mit $\omega = \sin^2 u$ folgendes Ergebnis:

Membran (M)

$$P = Q = 0, \quad R = 2a; \qquad \Sigma^{11} = \Sigma^{22} = a, \qquad \Sigma^{12} = 0;$$

$$p = q = 0, \quad r = 2a \cos u; \qquad \sigma^{11} = \frac{a}{\cos u}, \qquad \sigma^{22} = a \cos u, \qquad \sigma^{12} = 0;$$

Membran $(\tilde{M})$

$$\tilde{p} = \tilde{q} = 0, \quad \tilde{r} = 2a \sin^2 u \cos u; \qquad \tilde{\sigma}^{11} = a \frac{\sin^2 u}{\cos u}, \qquad \tilde{\sigma}^{22} = a \sin^2 u \cos u, \qquad \tilde{\sigma}^{12} = 0;$$

$$\tilde{P} = \tilde{Q} = 0, \quad \tilde{R} = 2a \frac{\sin^4 u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}}; \qquad \tilde{\Sigma}^{11} = a \frac{\sin^3 u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}}, \qquad \tilde{\Sigma}^{22} = a \sin u \sqrt{1 + \cos^2 u}, \qquad \tilde{\Sigma}^{12} = 0.$$

Da die Durchmesser der Kugel (M) in die Parallelen zur $\tilde{Z}$-Achse transformiert werden, sind alle auf die Membran $(\tilde{M})$ wirkenden Flächenkräfte zueinander parallel und können als Schwerkräfte aufgefaßt werden, wenn man sich $(\tilde{M})$ in passender Weise inhomogen mit Masse belegt denkt. Schneidet man von der Kugel (M) bzw. dem Drehhyperboloid $(\tilde{M})$ eine Haube ab, so besteht Gleichgewicht, wenn man die längs des Randes der Haube wirkenden Spannungskräfte als Randkräfte hinzufügt.

5. Spezielle Parameterkurven. Ein u, v-Kurvennetz, bei dem nur Querspannungen $(\sigma^{12} = 0)$ bzw. nur Schubspannungen $(\sigma^{11} = \sigma^{22} = 0)$ auftreten[8]), soll kurz als Querspannungs- bzw. Schubspannungsnetz bezeichnet werden. Indem man vermöge $u^* = u^*(u, v)$, $v^* = v^*(u, v)$ neue Parameterkurven einführt, für diese die σ^{*ik} berechnet und $\sigma^{*12} = 0$ bzw. $\sigma^{*11} = \sigma^{*22} = 0$ fordert, findet man folgendes Ergebnis:

Zu jeder vorgegebenen Spannungsverteilung gibt es ein Schubspannungsnetz und unendlich viele Querspannungsnetze. Das Schubspannungsnetz ist bestimmt durch die Differentialgleichung $\sigma^{11}\, du^2 + 2\sigma^{12}\, du\, dv + \sigma^{22}\, dv^2 = 0$ und besteht aus zwei zueinander konjugierten Kurvenscharen; diese sind reell und voneinander verschieden für $\sigma^{11}\sigma^{22} - (\sigma^{12})^2 < 0$. In den Querspannungsnetzen kann die eine Kurvenschar (unter Vermeidung der Kurven des Schubspannungsnetzes) willkürlich gewählt werden, die andere Kurvenschar ist dann dadurch bestimmt, daß die Kurven des Schubspannungsnetzes und der Querspannungsnetze sich harmonisch trennen.

[8]) Vgl. hierzu die in [6]) zitierte Arbeit von E. Beltrami.

Die Bedeutung der Schubspannungs- und Querspannungsnetze liegt darin, daß sie bei der projektiven Übertragung nach Nr. 3 ihren Charakter beibehalten. Das flächentheoretische Gegenstück sind die krümmungsfesten[3]) und die wackeligen[3]) Kurvennetze.

Die Querspannungsnetze lassen sich durch Fadenmodelle mit zwei Scharen gespannter gegenseitig verknoteter Fäden darstellen. Die in den Fäden auftretenden Spannungen geben die Querspannungen und werden durch die in den Verknotungen angreifenden äußeren Kräfte im Gleichgewicht gehalten. Die von den Fäden überdeckte Fläche braucht im Falle verschwindender äußerer Kräfte nicht durch ein starres Material realisiert zu werden.

6. Ebene Membranen. Die Membran (M) sei jetzt als eben vorausgesetzt $(z=0)$. Die Vektorgleichung (4) liefert dann nur zwei partielle Differentialgleichungen für die drei Spannungsfunktionen $\sigma^{ik}(u, v)$. Dies führt zu wesentlichen Unterschieden der Probleme der ebenen und der unebenen Membran; z. B. gibt es zu jedem Kurvennetz einer ebenen Membran Spannungsverteilungen, bei denen das Kurvennetz Querspannungsnetz ist, während bei unebenen Membranen nur spezielle Netze als Querspannungsnetze genommen werden können. Die in Nr. 3 behandelte projektive Übertragung läßt sich jedoch auch für ebene Membranen (M) vornehmen; das in Nr. 3 abgeleitete Ergebnis bleibt dabei wörtlich gültig.

II. Räumliche Spannungsfelder.

Die Untersuchungen des I. Abschnitts sollen jetzt auf räumliche Spannungsfelder übertragen werden. Die analog verlaufenden Rechnungen werde ich dabei nur kurz andeuten.

7. Bezeichnungen. In einem vorgegebenen räumlichen Feld bestehe Gleichgewicht zwischen den an der Begrenzung und in den einzelnen Raumelementen angreifenden Kräften (Begrenzungs- bzw. Volumenkräften) und den von ihnen hervorgerufenen Spannungen. Wir betrachten wieder das in Nr. 1 eingeführte Parallelflach vom Rauminhalt $\langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_w \rangle\, du\, dv\, dw$, das jetzt aber nicht an die Fläche $w=1$ angrenzen muß. Ferner setzen wir

$$\left.\begin{array}{ll} (p\,\mathfrak{x}_u + q\,\mathfrak{x}_v + r\,\mathfrak{x}_w)\,du\,dv\,dw & = \text{Volumenkraft im Raumelement } \langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_w \rangle\, du\, dv\, dw, \\ \left.\begin{array}{l} (\sigma^{11}\mathfrak{x}_u + \sigma^{12}\mathfrak{x}_v + \sigma^{13}\mathfrak{x}_w)\,dv\,dw \\ (\sigma^{21}\mathfrak{x}_u + \sigma^{22}\mathfrak{x}_v + \sigma^{23}\mathfrak{x}_w)\,dw\,du \\ (\sigma^{31}\mathfrak{x}_u + \sigma^{32}\mathfrak{x}_v + \sigma^{33}\mathfrak{x}_w)\,du\,dv \end{array}\right\} & = \text{Spannung am Flächenelement} \left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w)\,dv\,dw \\ (\mathfrak{x}_w \times \mathfrak{x}_u)\,dw\,du \\ (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\,du\,dv \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (8),$$

welche von der Umgebung auf das Raumelement $\langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_w \rangle\, du\, dv\, dw$ wirkt. Die Begrenzungskräfte können im Gleichgewichtsfall als Spannungskräfte angesetzt werden. Analog zu Nr. 1 ist durch die σ^{ik} die Spannungsverteilung vollständig festgelegt.

Durch Reduktion auf die Raum- bzw. Flächeneinheit und durch Beziehung auf die Einheitsvektoren $\frac{\mathfrak{x}_u}{|\mathfrak{x}_u|}$, $\frac{\mathfrak{x}_v}{|\mathfrak{x}_v|}$, $\frac{\mathfrak{x}_w}{|\mathfrak{x}_w|}$ erhält man für die Volumenkräfte bzw. Spannungen (alle Quadratwurzeln positiv!)

$$\left.\begin{array}{lll} P = p\,\dfrac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}}, & Q = q\,\dfrac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}}, & R = r\,\dfrac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g}}, \\ \Sigma^{1i} = \sigma^{1i}\,\dfrac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{22}\,g_{33} - g_{23}^2}}, & \Sigma^{2i} = \sigma^{2i}\,\dfrac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{33}\,g_{11} - g_{31}^2}}, & \Sigma^{3i} = \sigma^{3i}\,\dfrac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (9),$$

wobei die g_{ik} entsprechend Nr. 1 definiert sind und außerdem $\sqrt{g}$ den positiven Wert von $\langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_w \rangle$ bedeutet.

8. Gleichgewichtsbedingungen. Flächensatz und Schwerpunktsatz liefern

$$\sigma^{ik} = \sigma^{ki} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10),$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^{11}\mathfrak{x}_{uu} + \sigma^{22}\mathfrak{x}_{vv} + \sigma^{33}\mathfrak{x}_{ww} + 2\,\sigma^{23}\mathfrak{x}_{vw} + 2\,\sigma^{31}\mathfrak{x}_{wu} + 2\,\sigma^{12}\mathfrak{x}_{uv} \\ + \sigma_u^{11}\mathfrak{x}_u + \sigma_v^{22}\mathfrak{x}_v + \sigma_w^{33}\mathfrak{x}_w + \sigma_v^{23}\mathfrak{x}_w + \sigma_w^{23}\mathfrak{x}_v + \sigma_w^{31}\mathfrak{x}_u + \sigma_u^{31}\mathfrak{x}_w + \sigma_u^{12}\mathfrak{x}_v + \sigma_v^{12}\mathfrak{x}_u \\ + p\,\mathfrak{x}_u + q\,\mathfrak{x}_v + r\,\mathfrak{x}_w = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (11).$$

Die skalare Multiplikation von (11) mit $\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w$ bzw. $\mathfrak{x}_w \times \mathfrak{x}_u$ bzw. $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ ergibt drei partielle Differentialgleichungen für die sechs Funktionen $\sigma^{ik}_{(u,v,w)}$.

9. Projektive Transformationen. Durch dieselben Überlegungen und Rechnungen wie in Nr. 3 findet man das analoge Ergebnis:

Aus einem Gleichgewichtszustand zwischen den Volumenkräften p, q, r, den Begrenzungskräften und den Spannungen σ^{ik} eines vorgegebenen räumlichen Feldes (F) läßt sich ein Gleichgewichtszustand für jedes zu (F) projektive Feld $(\tilde{F})$ ableiten, indem man für $(\tilde{F})$ ansetzt[9])

$$\tilde{p} = \omega p, \qquad \tilde{q} = \omega q, \qquad \tilde{r} = \omega r, \qquad \tilde{\sigma}^{ik} = \omega \sigma^{ik} \text{ mit } \omega = \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Über die geometrische Bedeutung von $\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}$ vgl. Nr. 3.

10. Beispiel. Das vorgegebene Spannungsfeld (F) sei die Vollkugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$; es bestehe Gleichgewicht zwischen einem von außen her wirkenden konstanten Normaldruck auf die Begrenzung (Begrenzungskraft) und einer isotropen Spannungsverteilung im Innern der Vollkugel. Volumenkräfte sollen nicht auftreten. Durch dieselbe projektive Transformation wie in Nr. 4 wird die Vollkugel (F) in zwei vom zweischaligen Drehhyperboloid $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 + 1 = 0$ begrenzte, ins Unendliche sich erstreckende Raumgebiet abgebildet. Nach Nr. 9 erhält man mit $\omega = w^2 \sin^2 u$ folgendes Ergebnis:

Spannungsfeld (F):

$$\underline{\Sigma}^{11} = \underline{\Sigma}^{22} = \underline{\Sigma}^{33} = a,$$

$$\sigma^{11} = a \cos u, \qquad \sigma^{22} = \frac{a}{\cos u}, \qquad \sigma^{33} = a\, w^2 \cos u;$$

Spannungsfeld $(\tilde{F})$:

$$\tilde{\sigma}^{11} = a\, w^2 \sin^2 u \cos u, \qquad \tilde{\sigma}^{22} = a\, w^2 \frac{\sin^2 u}{\cos u}, \qquad \tilde{\sigma}^{33} = a\, w^4 \sin^2 u \cos u,$$

$$\tilde{\underline{\Sigma}}^{11} = a\, w^3 \sin^2 u \sqrt{w^2 + \cos^2 u}, \qquad \tilde{\underline{\Sigma}}^{22} = a\, w^4 \sin^4 u, \qquad \tilde{\underline{\Sigma}}^{33} = a \frac{w^3 \sin^4 u}{\sqrt{w^2 + \cos^2 u}}$$

Volumenkräfte und Schubspannungen $= 0$.

Die an $(\tilde{F})$ angreifenden Begrenzungskräfte müssen gleich den dort aus unserer Rechnung folgenden Spannungskräften $\tilde{\underline{\Sigma}}^{33}$ angenommen werden. Da sie parallel zur $\tilde{Z}$-Achse wirken, kann man sie als Schwerkräfte auffassen, wenn man sich die Begrenzungsfläche in passender Weise inhomogen mit Masse belegt denkt.

11. Spezielle Parameterflächen. Ein u-, v-, w-Flächengewebe mit $\sigma^{23} = \sigma^{31} = \sigma^{12} = 0$ bzw. $\sigma^{11} = \sigma^{22} = \sigma^{33} = 0$ soll Querspannungs- bzw. Schubspannungsgewebe heißen, da in diesen Fällen nur Quer- bzw. Schubspannungen auftreten. Da für die 6 Funktionen $\sigma^{ik}(u, v, w)$ nach Nr. 8 nur drei Bedingungen vorgeschrieben sind, gilt hier folgender von Nr. 5 verschiedener Sachverhalt:

Zu einer vorgegebenen Spannungsverteilung gibt es nicht nur unendlich viele Quersondern auch unendlich viele Schubspannungsgewebe. Für jedes Flächengewebe kann man Spannungsverteilungen angeben, bei denen es Quer- bzw. Schubspannungsgewebe ist.

Natürlich sind die Quer- und Schubspannungsgewebe im nämlichen Sinne projektivinvariant wie die Quer- und Schubspannungsnetze der Nr. 5.

Die hier für Gleichgewichtszustände behandelte Methode läßt sich auf beliebige Bewegungszustände verallgemeinern. Dabei kommen zu den Spannungen und Flächen- bzw. Volumenkräften noch Beschleunigungen hinzu, welche bei der projektiven Übertragung ebenso wie die Flächen- bzw. Volumenkräfte transformiert werden. Ferner gelten, wie ich bei späterer Gelegenheit genauer auseinandersetzen werde, analoge Sätze auch für Fachwerke. Man gewinnt dadurch aus den Spannungsverteilungen eines Fachwerks die Spannungsverteilungen der zu ihm projektiven Fachwerke. Unter der besonderen Annahme verschwindender äußerer Kräfte ergibt sich der Satz von H. Liebmann[10]) über die projektive Invarianz der „Ausnahmefachwerke". 421

[9]) Bei der Transformation der reduzierten Kräfte und Spannungen (vgl. (2)) kommen neben ω noch Längen-, Flächen- und Volumenverzerrungen als Faktoren hinzu.

[10]) H. Liebmann: Ausnahmefachwerke und ihre Determinante, Münchener Berichte, math.-phys. Klasse, 50 (1920), S. 197 bis 227.

Ballistik[1].

Von *O. v. Eberhard* in Essen-Bredeney.

Im Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik von Auerbach und Hort 1928 Band II, Lieferung I, Seite 240 u. folg. konnte Verfasser zeigen, daß unter Zugrundelegung eines Exponentialgesetzes für die Abnahme der Luftdichte mit der Höhe über dem Erdboden alle senkrechten Flugbahnen der Geschosse mit beliebigen Anfangsbedingungen und Parametern sich in ein einfach unendliches System von im voraus berechneten Bahnen einordnen lassen; des ferneren, wie man von vertikalen zu geneigten Bahnstücken übergehen kann, wofern diese Bahnstücke nur genügend wenig gekrümmt sind. Die Lösung setzte die klassische Formel für den Luftwiderstand

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{r^2 i}{P}\,\delta\,\frac{g_0}{g}\,f(v) = -\frac{r^2 i}{P}\,\delta\,\frac{g_0}{g}\,v^2 K(v)$$

voraus, wo v die Geschoßgeschwindigkeit, t die Zeit, r den Geschoßhalbmesser, P das Geschoßgewicht, i den ballistischen Formwert, $\delta = \varrho\, g$ das Gewicht eines cbm Luft darstellt und g_0 zum Beispiel bei Fasella gleich 9,8047 m/s² gesetzt ist. (Im Nachfolgenden sind noch an Bezeichnungen verwendet: s die Schallgeschwindigkeit bei der absoluten Temperatur T, s_0 Schallgeschwindigkeit bei der absoluten Temperatur T_0, für welche $K(v)$ ermittelt ist, R_1 die Gaskonstante, p der Luftdruck, ϑ der Neigungswinkel der Bahn mit der Horizontalen.)

Inzwischen ist erkannt worden, daß die Verzögerung durch den Luftwiderstand richtiger geschrieben wird

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{r^2 i}{P}\,\delta\,\frac{g_0}{g}\,v^2 K\left(\frac{v\,s_0}{s}\right)$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{r^2 i}{P}\,\delta\,\frac{g_0}{g}\,\frac{s^2}{s_0^2}\left(v\,\frac{s_0}{s}\right)^2 K\left(\frac{v\,s_0}{s}\right) = -\frac{r^2 i}{P}\,\delta\,\frac{g_0}{g}\,\frac{s^2}{s_0^2}\,f\left(v\,\frac{s_0}{s}\right),$$

und da $\delta\,\frac{s^2}{s_0^2} = \delta\,\frac{T}{T_0}$, also mit $p = \frac{\delta}{g}\,R_1\,T$ $\quad \delta\,\frac{s^2}{s_0^2} = \frac{g\,p}{R_1\,T_0}$ ist, wird auch

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{r^2\,i\,g_0\,p}{P\,R_1\,T_0}\,f\left(v\,\frac{s_0}{s}\right) = -\frac{r^2\,i}{P}\,p\,\Phi\left(v\,\frac{s_0}{s}\right) = -c_0\,p\,\Phi\left(v\,\frac{s_0}{s}\right).$$

Es soll nun gezeigt werden, daß auch für das neue Luftwiderstandsgesetz sich eine Lösung für den vertikalen und für den gestreckten geneigten Schuß finden läßt, bei welcher man jede Bahn, also jede Anfangsbedingung und jeden Parameter in eine einfach unendliche Schar von Lösungen einordnen kann.

Die Energiebilanz gibt für eine beliebige Bahn, wenn y nach abwärts positiv gerechnet wird,

$$\frac{d\,v^2}{2} = g\,dy - \frac{c_0\,p\,\Phi\left(\frac{v\,s_0}{s}\right)}{\sin\vartheta}\,dy \quad \text{oder} \quad \frac{d\,v^2}{dy} = 2\,g - \frac{2\,c_0\,p\,\Phi\left(v\,\frac{s_0}{s}\right)}{\sin\vartheta}.$$

Wir transformieren die Variablen in der von Langevin (Mémorial de l'artillerie française I 1920, Seite 260 u. folg.) angegebenen Weise, indem wir setzen

$$dy = \frac{s^2}{s_0^2}\,d\eta; \quad dx = \frac{s^2}{s_0^2}\,d\xi; \quad dt = \frac{s}{s_0}\,d\tau; \quad v = \frac{s}{s_0}\,w \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Dann wird obige Gleichung $\frac{d\,(s^2\,w^2)}{s^2\,d\eta} = 2\,g - \frac{2\,c_0\,p\,\Phi(w)}{\sin\vartheta}$.

Nun ist $\quad \frac{d\,(s^2\,w^2)}{s^2\,d\eta} = \frac{d\,w^2}{d\eta} + \frac{w^2}{s^2}\,\frac{d\,s^2}{d\eta} = \frac{d\,w^2}{d\eta} + \frac{w^2}{s_0^2}\,\frac{d\,s^2}{dy} = \frac{d\,w^2}{d\eta} + w^2\,\frac{d\left(\frac{s}{s_0}\right)^2}{dy}.$

[1]) Ergänzungen zu dem Aufsatz: Benutzung der Fasella Tabellen usw. (Diese Zeitschrift Bd. XI (1931) S. 253 ff.)

Da $$\frac{s^2}{s_0^2} = \frac{T}{T_0} \text{ ist, wird } \frac{d\left(\frac{s}{s_0}\right)^2}{d\,y} = \frac{1}{T_0}\frac{d\,T}{d\,y}.$$

Somit lautet unsere Gleichung in den neuen Koordinaten

$$\frac{d\,w^2}{d\,\eta} + \frac{w^2}{T_0}\frac{d\,T}{d\,y} = 2\,g - \frac{2\,c_0\,p\,\Phi(w)}{\sin\vartheta}.$$

Ferner ist bekanntlich

$$d\,p = \delta\,d\,y \quad \text{und} \quad p = \frac{\delta}{g}\,R_1\,T, \quad \text{somit} \quad \frac{d\,p}{p} = \frac{g\,d\,y}{R_1\,T} = \frac{g\,s^2}{R_1\,T\,s_0^2}\,d\,\eta$$

und mit $$\frac{s^2}{s_0^2} = \frac{T}{T_0} \quad \text{wird} \quad \frac{d\,p}{p} = \frac{g}{R_1\,T_0}\,d\,\eta \quad \text{und} \quad p = p_0\,e^{\frac{g}{R_1\,T_0}\eta}.$$

Die Gleichung wird also

$$\frac{d\,w^2}{d\,\eta} + \frac{w^2}{T_0}\frac{d\,T}{d\,y} = 2\,g - \frac{2\,c_0\,p_0\,e^{\frac{g}{R_1\,T_0}\eta}\,\Phi(w)}{\sin\vartheta}.$$

Bisher ist noch keine Annahme über $\frac{d\,T}{d\,y}$ gemacht. Wir setzen nun $\frac{d\,T}{d\,y} = \lambda$, nehmen also einen konstanten Temperaturgradienten an. Hiermit wird

$$\frac{d\,w^2}{d\,\eta} + \frac{\lambda}{T_0}\,w^2 = 2\,g - \frac{2\,c_0\,p_0\,e^{\frac{g}{R_1\,T_0}\eta}\,\Phi(w)}{\sin\vartheta} \qquad (2).$$

Für den vertikalen Schuß wird $\sin\vartheta = 1$, für geneigten Schuß wird $\sin\vartheta = (\sin\vartheta)_m$ ein Mittelwert.

Bei Änderung der Werte von c_0 und η_0 ändert sich, wenn g konstant bleibt, nur c_0, bzw. $e^{\frac{g}{R_1\,T_0}\eta}$ in $e^{\frac{g}{R_1\,T_0}\eta} \cdot e^{-\frac{g}{R_1\,T_0}\eta_0}$, also insgesamt nur der konstante Koeffizient des letzten Gliedes rechts. Mithin lassen sich sämtliche Lösungen, genau so wie im Handbuch von Auerbach und Hort angegeben, finden, wenn man die obige Gleichung für alle möglichen c_0 integriert.

Aus $d\,y = \frac{s^2}{s_0^2}\,d\,\eta = \frac{T}{T_0}\,d\,\eta$ und aus $T = T_g + \lambda\,y$, wobei T_g gleich T an der Stelle $y = 0$, findet man $\frac{T_0\,d\,y}{T_g + \lambda\,y} = d\,\eta$, also

$$\eta - \eta_0 = \frac{T_0}{\lambda}\ln\frac{T_g + \lambda\,y}{T_g + \lambda\,y_0} \qquad (3),$$

somit η als Funktion von y und umgekehrt. Ebenso findet man $v = \frac{s}{s_0}\,w$, und es ergibt sich aus $d\,t = \frac{d\,y}{v}$ durch Quadratur t.

Für den schrägen Schuß wird bekanntlich

$$\operatorname{tg}\vartheta\,d\,\vartheta = \frac{g\,d\,y}{v^2} \quad \text{oder hier} \quad \operatorname{tg}\vartheta\,d\,\vartheta = \frac{g\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 d\,\eta}{\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 w^2} = \frac{g\,d\,\eta}{w^2},$$

also $$\log^{10}\cos\vartheta_0 - \log^{10}\cos\vartheta = 0{,}43429\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{g\,d\,\eta}{w^2} \qquad (4).$$

Um ϑ zu finden, braucht man also auch nur nach Lösung der Hauptgleichung (2) obige Integrale für alle Parameter c_0 ein für allemal auszuwerten.

Das Verfahren bildet eine Ergänzung zu der stufenweisen Flugbahnberechnung des Verfassers (diese Zeitschrift 1931, S. 253 u. folg.). Statt des β-Wertes tritt hier $(\sin\vartheta)_m$ auf. Dieser Mittelwert kann in gleicher Weise wie dort gewonnen werden, und der Unterschied zwischen dem Anfangs- und dem Endwert sowie dem Wert von $\sin(\vartheta_m)$ für die Mitte des betrachteten Bahnstückes bildet auch hier ein Kriterium für die zulässige Länge des betrachteten Bahnstückes; dies kann man auch so ausdrücken, daß $\frac{\Delta\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_m}$ klein bleiben muß. Während aber bei der stufenweisen Berechnung die rasche Änderung der dort benutzten $k_1(v)$ Kurve in einigen Geschwindigkeitsbereichen dazu zwang, die Stufen kürzer zu bemessen, fällt diese Beschränkung hier weg, wenn man nur die Gl. (2) für die richtige $\Phi(v)$ Kurve integriert. Ferner entfällt die Beschränkung auf nicht zu große Höhenstufen, die dadurch bedingt wird, daß bei der stufenweisen Berechnung ein mittleres T und ein mittleres Luftgewicht eingesetzt werden muß. Man wird also die Methode bei Steilbahnen in den steilen Bahnstücken, ferner bei sonstigen Bahnen in dem Teil, in dem die $k_1(v)$ Kurve Maxima und Minima aufweist, mit Vorteil benutzen können, desgleichen für Überschlagsrechnungen zur Beschleunigung der stückweisen Berechnung vom Jahre 1931.

Noch eine Bemerkung ist nötig. Wir haben g als Konstante behandelt, während bei der Stufenberechnung g, insofern es das Geschoß beschleunigt oder verzögert (nicht aber, insofern es die Änderung der Luftdichte mit der Höhe beeinflußt), als Variable behandelt wurde. Um also für ein anderes, mittleres g das richtige Resultat zu finden, wäre es deshalb am einfachsten, für ein etwa um $6\,^0/_{00}$ kleineres g, welches im ersten Glied der rechten Seite der Gl. (2) eingesetzt wird, ebenfalls die Integration durchzuführen und dann für das mittlere g, welches bei dem betreffenden Bahnstück gelten muß, zu interpolieren.

Anmerkung: Die Langevinsche Transformation der allgemeinen Flugbahngleichungen für gekrümmte Bahnen führt an sich auf der Integration nicht leicht zugängliche Differentialgleichungen. Deshalb hat sie meines Wissens bisher keine praktische Anwendung gefunden. Trotzdem gibt sie ein bequemes Mittel, für die Annahme $\frac{dT}{dy}=\lambda=$ konst. die Flugbahnen in ein doppelt unendliches System von Bahnen einzuordnen.

Die Transformation führt, wie oben dargelegt, zu der Differentialgleichung

$$\frac{d\,w^2}{d\,\eta}+\frac{w^2}{T_0}\lambda=2\,g-\frac{2\,c_0\,p_0\,e^{\frac{g}{R_1\,T_0}\eta}\,\Phi(w)}{\sin\vartheta},$$

wobei, wie nochmals bemerkt werden möge, T_0 nur die Temperatur, bei welcher die Funktion $\Phi(w)$ als Funktion $\Phi(v)$ empirisch ermittelt wurde, bedeutet.

Angenommen, die Gleichung wäre für beliebige c_0 streng gelöst, so ergäbe sie die Beziehungen zwischen w, η (und ϑ).

Hätte man diese, so könnte man durch Quadraturen mittels

$$d\,y=\frac{s^2}{s_0^{\,2}}\,d\,\eta\,;\qquad v=\frac{s}{s_0}\,w \qquad (5)$$

für beliebige Temperaturen (bei konstantem Normaltemperaturgradienten) v als Funktion von y finden, d. h. für eine solche Beziehung zwischen T und y, daß einem bestimmten y ein bestimmtes T entspricht, während $\frac{dT}{dy}=\lambda$ bleibt.

Nun ist es aber keineswegs nötig, vorgenannte Gleichung selbst zu integrieren. Hat man vielmehr die in y, ϑ und v aufgestellten ballistischen Hauptgleichungen zum Beispiel in der früher[2]) angegebenen Weise integriert, und transformiert man die gefundenen Größen y, v (und ebenso x und t) mit Hilfe der Formeln

$$d\,\eta=\frac{s_0^{\,2}}{s^2}\,d\,y\,;\qquad w=\frac{s_0}{s}\cdot v\,;\qquad d\,\xi=\frac{s_0^{\,2}}{s^2}\cdot d\,x\,;\qquad d\,\tau=\frac{s_0}{s}\cdot d\,t$$

auf die Langevinschen Variablen, so kann man dann aus diesen die Werte von x, y, v und t für eine beliebige andere Temperatur im Gipfel bei normalen Temperaturgradienten mit Hilfe der Transformationsformeln (5) ermitteln, solange man nur $\lambda=\frac{dT}{dy}$ nicht variiert.

[2]) O. v. Eberhard: Ds. Zs. Bd. XI (1931) S. 253.

Man braucht also nur für eine endliche Zahl von Gipfelgeschwindigkeiten und c-Werten Flugbahnen mittels des gewöhnlichen Verfahrens[3]) zu errechnen, auf ξ, η, w und τ zu transformieren und hat damit eine Flugbahnschar, in welcher man durch Interpolation jede beliebige Bahn in ξ, η, w und τ finden und diese auf x, y, v und t transformieren kann. Dabei wird das bekannte c_0 im Abschußpunkt, an dem der Druck p_b herrschen soll,

$$c_0 = c_g \cdot \frac{p_0}{p_b} e^{\frac{g}{R_1 T_0} \eta_b},$$

wenn c_g den Wert von c im Gipfelpunkt bedeutet, also kann man setzen

$$\frac{c_0}{c_g} = \psi(\eta).$$

Man möchte zunächst glauben, daß der Übergang von x, y, t auf ξ, η, τ und umgekehrt der Übergang von ξ, η, τ auf x, y, t Quadraturen erfordere. Das ist aber nicht der Fall, wie nachfolgende Betrachtung zeigt.

Bezeichnet man mit T_g die Temperatur im Flugbahngipfel, mit T_1 diejenige am Abschußpunkt, und rechnet man y und η vom Gipfel anfangend positiv nach unten, so ergeben die Transformationsformeln durch Integration

$$\frac{y}{T_g} = \frac{1}{\lambda}\left[e^{\frac{\eta \lambda}{T_0}} - 1\right] = f_1(\eta),$$

also auch

$$\eta = \varphi_1\left(\frac{y}{T_g}\right).$$

Für x findet man zunächst

$$x = \int \frac{T_g + \lambda y}{T_0} d\xi.$$

Mit der vorhergehenden Gleichung wird hieraus

$$x = \int \frac{T_g + T_g \lambda f_1(\eta)}{T_0} d\xi,$$

also wenn ξ als Funktion von η bekannt ist,

$$x = T_g \int \frac{1 + \lambda f_1(\eta)}{T_0} \cdot \frac{d\xi}{d\eta} d\eta, \quad \text{also} \quad \frac{x}{T_g} = f_2(\eta),$$

wie übrigens auch von Langevin gefunden wurde. Weiter ist

$$t = \int \sqrt{\frac{T_g + \lambda y}{T_0}} d\tau$$

und hieraus folgt, wenn man ebenfalls den Wert von y einsetzt und τ als Funktion von η einführt:

$$\frac{t}{\sqrt{T_g}} = f_3(\eta).$$

Schließlich folgt aus $\frac{y}{T_g} = f_1(\eta)$ und aus $T_g + \lambda y = T_1$

$$T_1 = T_g [1 + \lambda f_1(\eta)], \qquad \text{somit} \quad \frac{T_1}{T_g} = f_4(\eta).$$

Bei den im ersten Teil dieser Arbeit angestellten Überlegungen, welche für den Steilschuß und für größere Teilbögen, die nur die Bedingung erfüllen müssen, daß $\frac{\Delta \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta}$ klein bleibt, bestimmt sind, gelten jetzt auch die gleichen Betrachtungen hinsichtlich dessen, daß $\frac{y}{T_g}$ und $\frac{t}{\sqrt{T_g}}$ von der Temperatur unabhängig sind. 426

[3]) O. v. Eberhard a. a. O.

Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie.

Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel[1]).

Von *H. Neuber* in München.

1. Einleitung. Für die Lösung ebener und achssymmetrischer Probleme der Elastizitätstheorie stehen bekanntlich Spannungsfunktionen zur Verfügung, aus denen Verschiebungen und Spannungen durch Differentiation von vornherein so gewonnen werden können, daß alle elastischen Gleichungen befriedigt sind. Dagegen fehlt es für die Lösung allgemeiner räumlicher Probleme offenbar noch an einer solchen Methode. Der Grund hierfür ist in der Art der bisherigen Ansätze zu suchen, die sämtlich auf Integrale führen. Bereits Maxwell[2]) brachte Spannungen und Verschiebungen zu drei Funktionen in Beziehung und stellte durch Einsetzen in die räumlichen Grundgleichungen die zwischen den Funktionen bestehende Differentialgleichung auf, ohne jedoch diese mit Hilfe eines weiteren Ansatzes in allgemeiner Form zu lösen. Bei späteren Ansätzen wurde einerseits derselbe Weg eingeschlagen, wobei es dann gelang, die jeweils auftretende Differentialgleichung in Integralform zu befriedigen. So enthält z. B. eine dieser Lösungstypen[3]) eine Integration nach x (cartesische Koordinaten), eine andere eine Integration nach r (Polarkoordinaten). Andererseits war man bestrebt, das Problem auf Randwertaufgaben der Potentialtheorie[4]) zurückzuführen, was bereits gelungen ist. Die hierbei auftretenden Integralgleichungen sind entweder nach der Fredholmschen Theorie oder nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen zu lösen. Obwohl jeder dieser Ansätze eine mathematisch einwandfreie Lösung des Problems darstellt, ist doch das Aufsuchen strenger Lösungen in beliebigen Koordinaten mit verhältnismäßig großem Rechenaufwand verknüpft. Es dürfte daher von Interesse sein, im folgenden einen sehr einfachen Ansatz kennenzulernen, mit dessen Hilfe es gelingt, Verschiebungen und Spannungen allein durch Differentiation aus einer allgemeinen räumlichen Spannungsfunktion zu gewinnen, die sich aus drei harmonischen Funktionen zusammensetzt. Das zugehörige Differentiationsschema wird vollständig symmetrisch und läßt sich deshalb leicht auf beliebige Koordinaten übertragen.

Als Beispiel wird das Problem des Hohlkegels unter Einzellast behandelt. Es werden bei drei verschiedenen Belastungsfällen die genauen Ausdrücke für die Spannungen angegeben.

2. Die Lösung der elastischen Grundgleichungen mit Hilfe des neuen Ansatzes. In cartesischen Koordinaten x, y, z mit den Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z, den Schubspannungen τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} und den Verschiebungen ξ, η, ζ lauten die Gleichgewichtsbedingungen[5]):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

usw. mit zyklischer Vertauschung. Ferner bestehen zwischen Spannungen und Verschiebungen bei Zugrundelegung des Hookeschen Gesetzes und Voraussetzung kleiner Formänderungen bekanntlich die folgenden Beziehungen[5]):

$$\sigma_x=2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{e}{m-2}\right) \quad \text{usw.} \qquad (2),$$

wobei

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=e \qquad (3)$$

gesetzt ist, und

$$\tau_{xy}=G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \quad \text{usw.} \qquad (4).$$

[1]) Vorliegende Abhandlung ist ein theoretisches Ergebnis der Forschungsarbeit, die vom Verfasser im Mech.-Techn. Labor. der Techn. Hochsch. München auf Veranlassung von Herrn Prof. Dr. L. Föppl durchgeführt wurde. Hierbei möchte ich mir gestatten, der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft für ihre liebenswürdige Unterstützung meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

[2]) J. C. Maxwell: Scientific Pap. of J. C. Maxwell, Paris 1927, Bd. 2, S. 198 u. f.

[3]) E. Trefftz: Mathematische Elastizitätstheorie, Handbuch d. Ph., Bd. VI, S. 92.

[4]) L. Lichtenstein: Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, Math. Zeitschr., Bd. 20, S. 21, 1924; ferner A. Korn: Über die Lösung des Grundproblems der Elastizitätstheorie, Math. Ann., Bd. 75, S. 497, 1914.

[5]) A. u. L. Föppl: Drang und Zwang, I. Bd., 1. Aufl., S. 16 u. f.

Durch Kombination mit den Gl. (1) erhält man die sogen. „elastischen Grundgleichungen“

$$\Delta \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad \text{usw.} \qquad (5),$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (6)$$

bedeutet.

Es kommt nun darauf an, mit Hilfe eines neuen Ansatzes die Verschiebungen derart aus harmonischen Funktionen abzuleiten, daß die Gl. (3) und (5) erfüllt sind, ohne daß — wie bei den bisherigen Methoden — Integrale auftreten. Dies gelingt mit folgendem Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} 2G\xi &= -\frac{\partial F}{\partial x} + C\Phi_1 \\ 2G\eta &= -\frac{\partial F}{\partial y} + C\Phi_2 \\ 2G\zeta &= -\frac{\partial F}{\partial z} + C\Phi_3 \end{aligned}\right\} \qquad (7).$$

Hierbei sind Φ_1, Φ_2, Φ_3 harmonische Funktionen, genügen also der Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \qquad (8).$$

Um über den Zusammenhang dieser Funktionen mit der Spannungsfunktion F Aufschluß zu erhalten, setzen wir die Verschiebungen entsprechend Ansatz (7) in die Gl. (3) und (5) ein. Es ergibt sich mit Berücksichtigung von Gl. (8)

$$-\Delta F + C\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) = 2Ge \qquad (9)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\Delta F + \frac{m}{m-2} 2Ge\right) = 0 \quad \text{usw.} \qquad (10).$$

Die Gl. (10) verlangen

$$-\Delta F + \frac{m}{m-2} 2Ge = \text{const},$$

oder, da die auf der rechten Seite stehende Konstante unwesentlich ist,

$$2Ge = \left(1 - \frac{2}{m}\right)\Delta F \qquad (11).$$

Setzt man dies in Gl. (9) ein, so ergibt sich

$$C\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{m}\right)\Delta F \qquad (12).$$

Während bei den bisherigen Methoden die entsprechende Gleichung nur in Integralform lösbar war, läßt sie sich hier in durchaus einfacher Weise befriedigen. Setzen wir nämlich

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 \qquad (13),$$

wobei auch Φ_0 der Gl. (8) genügt, so wird

$$\Delta F = 2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) \qquad (14)$$

und

$$\Delta\Delta F = 0 \qquad (15).$$

Gl. (12) ist schließlich vollständig befriedigt, wenn wir noch

$$C = 4\left(1 - \frac{1}{m}\right) \qquad (16)$$

setzen. Diese Konstante trat schon beim achssymmetrischen Spannungszustand[6]) in Erscheinung, und zwar wurde

$$2\left(1-\frac{1}{m}\right)=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

gesetzt. Man erhält endgültig für die Verschiebungen

$$2\,G\,\xi=-\frac{\partial F}{\partial x}+2\,a\,\Phi_1 \quad \text{usw.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Die Spannungen ergeben sich nach kurzer Zwischenrechnung aus den Gl. (2) und (4), wobei von den Gl. (11), (14) und (17) Gebrauch zu machen ist, zu folgenden Ausdrücken:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+a\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}-\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) \quad \text{usw.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19),$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+a\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right) \quad \text{usw.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Man überzeugt sich leicht, daß tatsächlich die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Ebenso sind die sechs Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, die sich durch Kombinieren der Gl. (2), (3) und (4) noch aufstellen lassen.

3. Deutung des Ansatzes. Der Ansatz soll zunächst an Hand der speziellen Elastizitätstheorie näher diskutiert werden.

Die Theorie der Torsion prismatischer Stäbe entspricht den Ausgangsgleichungen

$$\Phi_0=-x\,\Phi_1\,, \qquad \Phi_1=\Phi_1\,(y,z)\,, \qquad \Phi_2=\frac{G\,\vartheta}{a}\,x\,z\,, \qquad \Phi_3=-\frac{G\,\vartheta}{a}\,x\,y \quad \ldots\ldots \quad (20\text{a}).$$

Es wird dann

$$F=0\,, \qquad \xi=\frac{a}{G}\,\Phi_1\,, \qquad \eta=\vartheta\,x\,z\,, \qquad \zeta=-\vartheta\,x\,y \quad \ldots\ldots \quad (20\text{b}).$$

Die Theorie der Torsion runder Stäbe veränderlichen Querschnittes entspricht den Gleichungen

$$\Phi_0=0\,, \qquad \Phi_1=0\,, \qquad \Phi_2=\frac{G}{a}\,z\cdot\varphi\,(x,r)\,, \qquad \Phi_3=-\frac{G}{a}\,y\cdot\varphi\,(x,r) \quad \ldots\ldots \quad (20\text{c}),$$

wobei mit x, r Zylinderkoordinaten zugrunde gelegt sind ($r=\sqrt{y^2+z^2}$). Es wird

$$F=0\,, \qquad \xi=0\,, \qquad \eta=z\cdot\varphi\,, \qquad \zeta=-y\cdot\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20\text{d}).$$

Aus $\Delta\,\Phi_2=0$ folgt für φ die bekannte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20\text{e}).$$

Der Fall $F=0$ entspricht mithin der allgemeinen Torsion.

Die ebene Elastizitätstheorie wird erhalten mit

$$\Phi_0=\Phi_0{}'+a\,\Phi_1{}'\,, \qquad \Phi_1=\frac{\partial \Phi_1{}'}{\partial x}\,, \qquad \Phi_2=0\,, \qquad \Phi_3=0\,, \qquad F=F'+a\,\Phi_1{}' \quad \ldots \quad (20\text{f}),$$

wobei $\Phi_0{}'$ und $\Phi_1{}'$ zwei neue harmonische Funktionen sind, die nur von x und y abhängen. F' entspricht jetzt der Airyschen Spannungsfunktion.

Die achssymmetrische Elastizitätstheorie geht aus derselben Substitation hervor, wenn wir voraussetzen, daß $\Phi_0{}'$ und $\Phi_1{}'$ nur von x und r (Zylinderkoordinaten, s. o.) abhängen. F' ist dann die achssymmetrische Spannungsfunktion[7]).

Auf Grund dieses Zusammenhanges wollen wir F als „räumliche Spannungsfunktion" bezeichnen.

[6]) H. Neuber: Beiträge für den achssymmetrischen Spannungszustand, Diss., München 1932, S. 3.
[7]) A. u. L. Föppl: Drang und Zwang, II. Bd., 2. Aufl., S. 208, München und Berlin 1928.

Für den allgemeinen Spannungszustand ist bemerkenswert, daß immer eine der vier harmonischen Funktionen gleich Null gesetzt werden darf, ohne die Vollständigkeit zu beeinträchtigen. Dies geht aus der Substitution

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_0 = \Phi_0' + 2\,a\,\Phi_3' - \left(x\frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} + z\frac{\partial \Phi_3'}{\partial z}\right), \quad \Phi_1 = \Phi_1' + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x}, \\ &\Phi_2 = \Phi_2' + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y}, \quad \Phi_3 = \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z}, \quad F = F' + 2\,a\,\Phi_3' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (20\mathrm{g})$$

hervor, welche an der Allgemeinheit der vier Funktionen Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 nichts ändert und zu dem neuen Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &F' = \Phi_0' + x\,\Phi_1' + y\,\Phi_2', \qquad 2\,G\,\xi = -\frac{\partial F'}{\partial x} + 2\,a\,\Phi_1', \\ &2\,G\,\eta = -\frac{\partial F'}{\partial y} + 2\,a\,\Phi_2', \qquad 2\,G\,\zeta = -\frac{\partial F'}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20\mathrm{h})$$

führt, welches nur noch die drei harmonischen Funktionen Φ_0', Φ_1', Φ_2' enthält. Es werden also in Wirklichkeit nur drei harmonische Funktionen benötigt. Einer bestimmten harmonischen Funktion entsprechen mithin gerade drei voneinander verschiedene Spannungszustände. Die Mannigfaltigkeit des allgemeinen elastischen Zustandes ist gleich der dreifachen Mannigfaltigkeit der harmonischen Funktionen.

Für das Aufsuchen von Lösungen ist es zweckmäßig, jeweils ein Koordinatensystem zugrunde zu legen, in welchem die Randflächen des Körpers enthalten sind. Aus diesem Grunde wollen wir auf krummlinige Koordinaten übergehen.

4. Übergang auf krummlinige Koordinaten. Gehören zu dem orthogonalen Koordinatensystem u, v, w, dessen Achsen die Richtungskosinus $\cos(x, u)$ usw. mit den ursprünglichen Achsen bilden, die Spannungskomponenten σ_u, τ_{uv} usw. und die Verschiebungskomponenten U, V, W, so gilt, da sich letztere als Vektorkomponenten transformieren,

$$U = \cos(x, u)\cdot\xi + \cos(y, u)\cdot\eta + \cos(z, u)\cdot\varphi \quad \text{usw.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21).$$

Die Richtungskosinus erhält man bekanntlich aus

$$\cos(x, u) = \frac{1}{h_u}\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{usw.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22),$$

wobei die h_u, h_v, h_w der krummlinigen Verzerrung Rechnung tragen und aus den Gleichungen

$$h_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad \text{usw.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

zu bestimmen sind. (In Tensorschreibweise wird $h_u = \sqrt{g_{11}}$.)

Setzt man für ξ, η, φ die Ausdrücke aus Gl. (18) ein und beachtet, daß sich auch die ersten Ableitungen einer Funktion als Vektorkomponenten transformieren, so erhält man schließlich

$$U = \frac{1}{2\,G\,h_u}\left(-\frac{\partial F}{\partial u} + 2\,a\,\Phi_1\frac{\partial x}{\partial u} + 2\,a\,\Phi_2\frac{\partial y}{\partial u} + 2\,a\,\Phi_3\frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{usw.} \; . \; . \; . \; . \; (24).$$

Für die Ermittlung der Spannungen verwendet man am einfachsten die zwischen Spannungen und Verschiebungen in krummlinigen Koordinaten bestehenden Gleichungen, die wohl erstmals von Borchardt[8]) angegeben wurden. In der hier gewählten Schreibweise ergibt sich

$$\sigma_u = \frac{2\,G}{h_u}\left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{V}{h_v}\frac{\partial h_u}{\partial v} + \frac{W}{h_w}\frac{\partial h_u}{\partial w} + \frac{2-a}{2\,(a-1)}h_u\cdot e\right) \quad \text{usw.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

$$\tau_{uv} = G\left(\frac{h_v}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{h_v}\right) + \frac{h_u}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{h_u}\right)\right) \quad \text{usw.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26).$$

[8]) Borchardt: J. f. Math. (Crelle), Bd. 76, 1873.

Der Laplacesche Operator geht über in

$$\Delta = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\} \quad . \; . \; . \; (26a).$$

Nachdem nunmehr alle mathematischen Vorbedingungen gegeben sind, soll das Verfahren auf den Hohlkegel mit beliebig gerichteter Einzellast Anwendung finden.

5. Der Hohlkegel mit beliebig gerichteter Einzellast. Es werden zweckmäßig Polarkoordinaten mit

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v\cos w, \qquad z = u\sin v\sin w \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

zugrunde gelegt. Aus den Gl. (25) erhält man

$$h_u = 1, \qquad h_v = u, \qquad h_w = u\cdot\sin v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28).$$

Wie aus Abb. 1 und 2 ersichtlich ist, fällt die Kegelachse mit der X-Achse zusammen; ferner ist die Kegelspitze zugleich Koordinatenursprung. Der Hohlkegel wird begrenzt von den Flächen $v=\gamma$ und $v=\delta$. Als erste Gruppe der Randbedingungen ergeben sich aus der Lastfreiheit der Oberfläche:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } v=\gamma\\ \text{und } v=\delta\end{array}\right\} \quad \sigma_v = 0, \qquad \tau_{uv} = 0, \qquad \tau_{vw} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29),$$

also sechs Bedingungen. Weitere Bedingungen ergeben sich daraus, daß für einen beliebigen, durch den Hohlkegel gelegten Schnitt die an der Schnittfläche angreifenden Spannungen zusammen mit der Einzelkraft ein Gleichgewichtssystem bilden müssen. Es muß also die x-Komponente der Einzelkraft entgegengesetzt gleich der Summe aller x-Komponenten der an der Schnittfläche angreifenden Spannungen sein. Das Entsprechende gilt für die y- und z-Komponenten. Wird der Schnitt längs einer Kugelfläche gelegt und sind P_x, P_y, P_z die Komponenten der Einzelkraft, so folgen

$$-P_x = \int_F \sum_{\mu=u,v,w} \tau_{u\mu}\cos(x,\mu)\,dF \text{ usw.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30).$$

Hierbei wurde der Einfachheit halber $\sigma_u = \tau_{uu}$ gesetzt. Weitere Beziehungen ergeben sich aus dem Gleichgewicht gegen Verdrehen. Es muß für irgendeinen Bezugspunkt das Moment der Einzelkraft dem Moment der an der Schnittfläche angreifenden Spannungen entgegengesetzt gleich sein. Wird die Spitze des Kegels als Bezugspunkt gewählt und sind M_x, M_y, M_z die Momente der Einzelkraft um die X-, Y- bzw. Z-Achse, so wird

$$M_x = \int_F \sum_{\mu=u,v,w} \tau_{u\mu}\,(y\cos(z,\mu) - z\cos(y,\mu))\,dF \text{ usw.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31).$$

Indem nun verlangt wird, daß jeweils nur eines dieser sechs Integrale von Null verschieden sein soll, zerfällt die allgemeine Lösung des Problems zunächst in sechs voneinander verschiedene Partikularlösungen. Da die Lösungen für P_y und P_z und ebenso für M_y und M_z durch Vertauschung der Y- und Z-Achse ineinander übergehen, reduziert sich ihre Zahl auf vier. Da ferner die Lösung für reine Torsion ($M_x \neq 0$) bereits von A. Föppl[9]) mit Hilfe der Theorie der Torsion runder Stäbe von veränderlichem Querschnitt gegeben wurde, bleiben nur mehr drei Partikularlösungen anzugeben.

A. Die Einzelkraft wirkt in Richtung der X-Achse und greift in der Kegelspitze an (s. Abb. 1).

In diesem Falle müssen alle Integrale mit Ausnahme desjenigen für P_x verschwinden. Der Ausdruck für P_x lautet ausführlich:

$$-P_x = u^2 \int_0^{2\pi}\int_\delta^\gamma (\sigma_u\cos v - \tau_{uv}\sin v)\sin v\,dv\,dw \quad . \; (32).$$

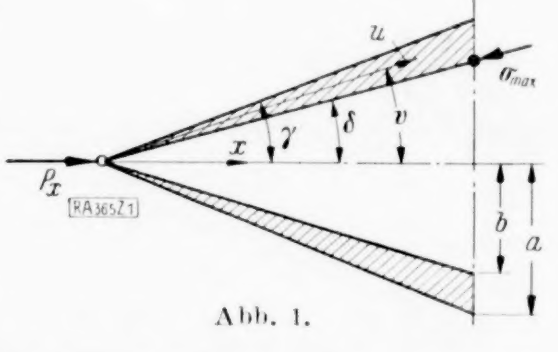


Abb. 1.

[9]) A. u. L. Föppl: Drang und Zwang, II. Bd., 2. Aufl., S. 108, München u. Berlin 1928.

Beim Aufsuchen geeigneter harmonischer Funktionen, die diesen Bedingungen genügen, gelangt man zu folgendem Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 &= A(\ln u + \ln(1+\cos v)) + C(\ln u + \ln \sin v), \\ \Phi_1 &= B\cdot\frac{1}{u}, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (33).$$

Mit Anwendung der Gl. (13) erhält man als Spannungsfunktion

$$F = (A + C)\ln u + A\ln(1+\cos v) + C\ln\sin v + B\cos v \quad \ldots \ldots (34).$$

Hieraus sind zunächst entsprechend den Gl. (24) die Verschiebungen zu bilden. Aus den Verschiebungen ergeben sich schließlich mit Hilfe der Gl. (25) und (26) folgende Spannungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{u^2}\left[A - (2+\alpha)B\cos v + C\right] \\ \sigma_v &= \frac{1}{u^2}\left[-A\frac{\cos v}{1+\cos v} + (\alpha-1)B\cos v + C\cot^2 v\right] \\ \sigma_w &= \frac{1}{u^2}\left[-A\frac{1}{1+\cos v} + (\alpha-1)B\cos v - C\frac{1}{\sin^2 v}\right] \\ \tau_{uv} &= \frac{\sin v}{u^2}\left[-A\frac{1}{1+\cos v} + (\alpha-1)B + C\frac{\cos v}{\sin^2 v}\right] \\ \tau_{vw} &= 0, \qquad \tau_{uw} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (35).$$

Man erkennt, daß zwischen σ_v und τ_{uv} folgende Beziehung besteht:

$$\sigma_v - \tau_{uv}\cdot\cot v = 0 \quad \ldots \ldots (36).$$

Die sechs Randbedingungen (29) reduzieren sich daher auf zwei. Aus beiden Gleichungen folgen:

$$\frac{A}{C} = -\frac{1+\cos\gamma\cos\delta}{(1-\cos\gamma)(1-\cos\delta)}, \quad \frac{B}{C} = -\frac{1}{(\alpha-1)(1-\cos\gamma)(1-\cos\delta)} \quad \ldots (37).$$

Zur Bestimmung von C steht noch Gl. (32) zur Verfügung. Es ergibt sich

$$C = -\frac{P_x(\alpha-1)(1-\cos\gamma)(1-\cos\delta)}{2\pi(\cos\delta-\cos\gamma)[\cos^2\gamma+\cos^2\delta+(2-\alpha)\cos\gamma\cos\delta]} \quad \ldots \ldots (38).$$

Die maximale Spannung tritt an der Innenseite auf ($v = \delta$, s. Abb. 1). Hier wird $u = \frac{b}{\sin\delta} = a\frac{\cot\gamma}{\cos\delta}$. Wir erhalten

$$\sigma_{\max} = -\frac{P_x(\cos\gamma+\cos\delta)[3\cos\delta-(\alpha-1)\cos\gamma]}{2\pi(a^2-b^2)\cos^2\gamma[\cos^2\gamma+\cos^2\delta+(2-\alpha)\cos\gamma\cos\delta]} \quad \ldots \ldots (39).$$

Für den Vollkegel ergibt sich

$$\sigma_{\max} = -\frac{P_x(1+\cos\gamma)[3-(\alpha-1)\cos\gamma]}{2\pi a^2\cos^2\gamma[1+(2-\alpha)\cos\gamma+\cos^2\gamma)} \quad \ldots \ldots (40).$$

Die Lösung stimmt für den Vollkegel mit einer anderen Lösung für das achsial gedrückte Hyperboloid überein, wenn letzteres in großer Entfernung vom engsten Querschnitt betrachtet wird[10]).

Für die Kegelschale[11]) ergibt sich durch Grenzübergang $\gamma \to \delta$ und $a \to b$ eine einfache Formel. Ist h die Wandstärke der Schale, so wird $a^2 - b^2 \approx \frac{2ah}{\cos\gamma}$, und wir erhalten

$$\sigma_{\max} = -\frac{P_x}{2\pi a h\cos\gamma} \quad \ldots \ldots (41).$$

[10]) H. Neuber: Beiträge für den achssymmetrischen Spannungszustand, Diss., München 1932, S. 37 u. f.

[11]) Die Formeln für die Kegelschale gelten nur für nicht allzu kleine Wandstärken, da dann die Voraussetzung kleiner Verschiebungen nicht mehr gilt.

B. Die Einzellast wirkt in Richtung der Y-Achse und greift in der Kegelspitze an (s. Abb. 2).

In diesem Falle müssen alle Integrale mit Ausnahme desjenigen für P_y verschwinden. Letzteres lautet ausführlich

$$-P_y = u^2 \int_0^{2\pi}\int_\delta^\gamma [\sigma_u \sin v \cos w + \tau_{uv} \cos v \cos w - \tau_{uw} \sin w] \sin v \, d v \, d w] \quad . \; . \; . \; (42).$$

Für die Erfüllung dieser Bedingungen ist der folgende Ansatz geeignet:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 &= \cos w \left[B \frac{\sin v}{1+\cos v} + D \frac{\sin v}{1-\cos v}\right] \\ \Phi_1 &= \frac{\cos w}{u}\left[C \frac{\sin v}{1+\cos v} + E \frac{\sin v}{1-\cos v}\right] \\ \Phi_2 &= \frac{A}{u}, \qquad \Phi_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43).$$

Die Spannungsfunktion ergibt sich entsprechend Gl. (13) zu

$$F = \cos w \sin v \left[A + C - E + \frac{B-C}{1+\cos v} + \frac{D+E}{1-\cos v}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (44).$$

Mit Hilfe der Gl. (24), (25) und (26) erhalten wir hieraus die Spannungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\sin v \cos w}{u^2}\left[(2+a)(-A-C+E) + \frac{2aC}{1+\cos v} - \frac{2aE}{1-\cos v}\right] \\ \sigma_v &= \frac{\sin v \cos w}{u^2}\left[(a-1)\;(A+C-E) - \frac{2aC}{1+\cos v} + \frac{2aE}{1-\cos v} + \frac{-B+C}{(1+\cos v)^2} - \frac{D+E}{(1-\cos v)^2}\right]. \\ \sigma_w &= \frac{\sin v \cos w}{u^2}\left[(a-1)\;(A+C-E) + \frac{B-C}{(1+\cos v)^2} + \frac{D+E}{(1-\cos v)^2}\right] \\ \tau_{uv} &= \frac{\cos w}{u^2}\left[(a-1)(-A-C+E)\cos v + 2a(C+E) + \frac{B-(1+a)C}{1+\cos v} - \frac{D+(1+a)E}{1-\cos v}\right] \\ \tau_{vw} &= \frac{\sin v \sin w}{u^2}\left[\frac{aC}{1+\cos v} + \frac{aE}{1-\cos v} + \frac{B-C}{(1+\cos v)^2} - \frac{D+E}{(1-\cos v)^2}\right] \\ \tau_{uw} &= \frac{\sin w}{u^2}\left[(a-1)A + (1+a)(-C+E) + \frac{-B+(1+a)C}{1+\cos v} - \frac{D+(1+a)E}{1-\cos v}\right] \end{aligned}\right\} (44\,\text{a}).$$

Es zeigt sich, daß wiederum zwischen den an den Randbedingungen (29) beteiligten Spannungen eine Beziehung besteht, und zwar wird in diesem Falle

$$\sigma_v \cos v + \tau_{uv} \sin v - \tau_{vw} \cot w = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45).$$

Mithin entsprechen den Bedingungen (29) nur vier Gleichungen. Zusammen mit Gl. (42) stehen für die fünf noch unbekannten Konstanten daher fünf Gleichungen zur Verfügung, so daß letztere eindeutig festgelegt sind.

Zur Abkürzung wollen wir setzen

$$\cos\gamma = c, \quad \cos\delta = d, \quad N = (1+c)(1+d)[(d-c)^2 + (c+d)(1-cd)] \quad (46).$$

Dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{C} &= \frac{4}{(a-1)N}[(d-c)^2 + (2-a)cd(1-cd)] \\ \frac{B}{C} &= \frac{(1+c)(1+d)}{N}[-(a-1)(d-c)^2 - (a-1)(c+d)(1-cd) - 2acd(1-cd)] \\ \frac{D}{C} &= \frac{(1-c)(1-d)}{N}[-(a-1)(d-c)^2 + (a-1)(c+d)(1-cd) - 2acd(1-cd)] \\ \frac{E}{C} &= \frac{(1-c)(1-d)}{N}[-(d-c)^2 + (c+d)(1-cd)] \\ C &= \frac{P_y(a-1)N}{4\pi a(d-c)\{(d-c)^2[(3-cd)(1-cd)-(d-c)^2] + (4-a)cd(1-cd)^2\}} \end{aligned}\right\} \quad (46\,\text{a}).$$

Die maximale Biegungsspannung tritt an der Stelle $w = 180^\circ$, $v = \gamma$ (vgl. Abb. 2) auf. Hier wird $u = \frac{a}{\sin\gamma}$. Es ergibt sich

$$\sigma_{\max} = \frac{P_y \sin\gamma\,(1-c^2)\,\{3(d-c)^2 + d\,[3\,c-(a-1)\,d]\,(1-c\,d)\}}{\pi\,a^2\,(d-c)\,\{(d-c)^2\,[(3-c\,d)\,(1-c\,d)-(d-c)^2]+(4-a)\,c\,d\,(1-c\,d)^2\}} \quad . \; . \quad (47).$$

Die maximale Schubspannung tritt an der Stelle $w = 90^\circ$, $v = \delta$ (vgl. Abb. 1) auf. Hier wird $u = \frac{a\,c}{d\sin\gamma}$. Wir erhalten

$$\tau_{\max} = \frac{P_y\,(a-1)\,d^2\,(1-c^2)\,(1-c\,d)}{\pi\,a^2\,c\,\{(d-c)^2\,[(3-c\,d)\,(1-c\,d)-(d-c)^2]+(4-a)\,c\,d\,(1-c\,d)^2\}} \quad . \; . \; . \; . \quad (48).$$

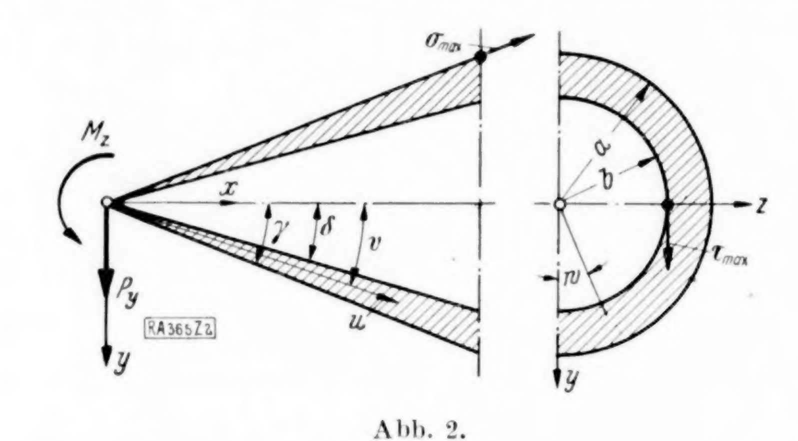


Abb. 2.

Beim Vollkegel müssen von vornherein die Konstanten D und E gleich Null gesetzt werden, da die zugehörigen Funktionen in der Achse Unendlichkeitsstellen besitzen. Man erhält so

$$\sigma_{\max} = \frac{P_y\,(4-a)\sin\gamma\,(1+c)}{\pi\,a^2\,(1-c)\,[2+(2-a)\,c]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49),$$

$$\tau_{\max} = \frac{P_y\,(a-1)\,(1+c)}{2\,\pi\,a^2\,c\,[2+(2-a)\,c]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50).$$

Setzt man andererseits in den Gl. (47) und (48) $d = 1$, so erhält man die Formeln für den Vollkegel mit einer feinen axialen Bohrung. $\sigma_{\max}$ ändert sich nicht, jedoch erhält man für $\tau_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{P_y\,(a-1)\,(1+c)}{\pi\,a^2\,c\,[2+(2-a)\,c]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51),$$

d. h. genau den doppelten Wert. Eine feine axiale Bohrung erhöht mithin die Schubspannung um 100%.

Ferner lassen sich auch hier durch Grenzübergang die Spannungen für die Kegelschale angeben, und zwar wird

$$\sigma_{\max} = \frac{P_y}{\pi\,a\,h\sin\gamma}, \qquad \tau = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52).$$

C. Die Einzellast wirkt in Richtung der Y-Achse. Ihr Angriffspunkt liegt auf der X-Achse im Unendlichen (reine Biegung).

In diesem Falle müssen alle Integrale mit Ausnahme desjenigen für M_z verschwinden. Der Ausdruck für M_z lautet ausführlich:

$$M_z = u^3 \int_0^{2\pi}\int_\delta^\gamma (\tau_{u\,v}\cos w - \tau_{u\,w}\cos v\sin w)\sin v\;d\,v\,d\,w \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53).$$

Beim Aufsuchen geeigneter Funktionen gelangt man zu folgendem Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{\cos w}{u}\left[B\,\frac{\sin v}{1+\cos v} + D\,\frac{\sin v}{1-\cos v} + E\,\frac{1}{\sin v}\right], \\ \Phi_1 &= \frac{\cos w}{u^2}\left[C\sin v + E\left(\sin v\ln\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \cot v\right)\right], \\ \Phi_2 &= \frac{1}{u^2}\left[A\cos v + E\left(\cos v\ln\operatorname{tg}\frac{v}{2} + 1\right)\right], \quad \Phi_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (54).$$

Mit Anwendung der Gl. (13) wird die Spannungsfunktion

$$F = \frac{\cos w \sin v}{u} \left[(A + C) \cos v + 2 E \left(\cos v \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} + 1 \right) + \frac{B}{1 + \cos v} + \frac{D}{1 - \cos v} \right] \quad . \quad . \quad (55).$$

Bei der Ausrechnung der Spannungen mit Hilfe der Gl. (24), (25) und (26) zeigt sich in diesem Falle, daß zwischen σ_v und τ_{vw} folgende Beziehung besteht:

$$\sigma_v - \tau_{vw} \cot w \cos v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56).$$

Die sechs Randbedingungen (29) reduzieren sich daher wieder auf vier. Als weitere Bedingung kommt noch Gl. (53) hinzu. Die Auflösung dieses Integrals bietet auch hier keine Schwierigkeiten. Es stehen mithin wieder für die fünf Konstanten gerade fünf Gleichungen zur Verfügung. Die Ausrechnung sei hier übergangen. Es sollen nun die Maximalspannungen angegeben werden. Zur Abkürzung wollen wir setzen

$$\cos \gamma = c, \quad \cos \delta = d, \quad \ln \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = g, \quad \ln \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57),$$

ferner

$$\left. \begin{aligned} N = {} & \frac{4 a (1 + c d) (1 - c d)^2}{3 (1 - c^2) (1 - d^2)} \left[6 (1 - c^2 d^2) + (4 - a) c d (2 + c d)^2 \right] \\ & + \frac{4}{3} (1 - c^2 d^2) \left[- 6 a (1 + c d) + (4 - a) c d (18 + 5 a + a c d) \right] \\ & + \frac{g - k}{c - d} \Big[12 (4 - a) c d (1 - c d)^2 (2 - a + 2 c d) - \frac{4}{3} (4 - a) (2 + a) c d (c - d)^4 \\ & + 8 (4 - a) (c - d)^2 (1 - c d) \{ 1 + (1 + a) c d - c^2 d^2 \} - 12 a (c - d)^2 (1 - c^2) (1 - d^2) \Big] \end{aligned} \right\} \quad (58).$$

Die maximale Biegungsspannung, die wieder an der Stelle $w = 180^\circ$, $v = \gamma$ (vgl. Abb. 2) auftritt, ergibt sich zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} = {} & \frac{M_z (1 - c^2)^2}{\pi a^3 (d - c) N} \Big\{ 4 \frac{1 - c^2 d^2}{(1 - c^2) (1 - d^2)} \Big[(12 + 5 a + a^2) c (1 - d^2) \\ & + a (10 - a) c + 2 a (1 - a) d \Big] + 4 (48 - 11 a - a^2) d (1 + c d) - 240 d \\ & + 12 (1 - c d) \frac{g - k}{c - d} \left[2 (10 - a) c d^2 - (4 + 5 a) c - a (1 - a) d \right] \\ & + 4 (1 - a) (8 + a) d (c - d) (g - k) \Big\} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Die maximale Schubspannung (wieder an der Stelle $w = 90^\circ$, $v = \delta$ (vgl. Abb. 2), wird

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} = {} & \frac{M_z \sin \gamma (1 - c^2) d^3}{\pi a^3 (d - c) c^3 N} \Big\{ 4 a (1 - c^2 d^2) \left[c \frac{2 (1 - a) + (4 - a) c d}{1 - c^2} + \frac{6 d}{1 - d^2} \right] \\ & + 4 a \left[9 + (11 + a) c d \right] (d - c) + 4 (4 - a) c \left[a + 6 c d - (6 + a) c d^3 \right] \\ & + 12 (1 - c d) (1 - d^2) \frac{g - k}{c - d} \left[- a (1 - a) c - 3 a d + 2 (4 - a) c^2 d \right] \\ & + 4 (1 - a) (8 + a) c (c - d) (g - k) \Big\} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

Beim Vollkegel müssen von vornherein die Konstanten D und E gleich Null gesetzt werden, da die zugehörigen Funktionen in der Achse unendlich werden. Es werden

$$\sigma_{\max} = \frac{3 M_z (1 + c)^2 [(10 - a) c + 2 (1 - a)]}{\pi a^3 [6 (1 - c^2) + (4 - a) c (2 + c)^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61),$$

$$\tau_{\max} = \frac{9 M_z (1 + c)^2 \sin \gamma}{\pi a^3 c^3 [6 (1 - c^2) + (4 - a) c (2 + c)^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Für den Vollkegel mit einer feinen axialen Bohrung wird (aus Gl. (60) mit $d = 1$)

$$\tau_{\max} = \frac{18 M_z (1 + c)^2 \sin \gamma}{\pi a^3 c^3 [6 (1 - c^2) + (4 - a) c (2 + c)^2]} \quad \text{(d. h. Erhöhung um } 100\,\%\text{)}.$$

Für die K e g e l s c h a l e wird durch Grenzübergang $\gamma \rightarrow \delta$:

$$d - c \approx \frac{h\,a}{u^2}, \quad \frac{g - k}{c - d} \approx -\frac{1}{\sin^2 \gamma} \qquad (63)$$

und wir erhalten als Spannungen

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{\pi\, a^2\, h \cos \gamma}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_z \operatorname{tg} \gamma}{\pi\, a^2\, h} \qquad (64).$$

Durch Überlagerung mit dem Spannungszustand B können wir jetzt auch die Formeln für den K e g e l s t u m p f angeben (s. Abb. 3). Zu diesem Zweck zerlegen wir die Kraft P,

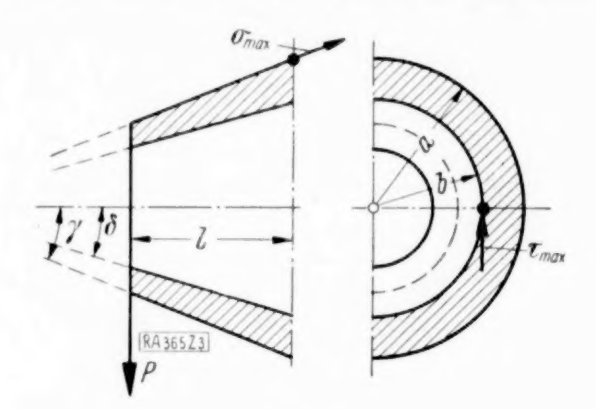


Abb. 3.

die senkrecht zur Achse im Abstand $a \cdot \cot \gamma - l$ (l sei die Länge des Kegelstumpfes) von der Spitze angreifen soll, in eine in der Spitze angreifende Kraft gleicher Größe, die mit P_y zu identifizieren ist, und in ein Biegungsmoment vom Betrage $-P(a \cdot \cot \gamma - l)$, welches gleich M_z zu setzen ist.

Für die K e g e l s t u m p f s c h a l e wird dann

$$\sigma_{\max} = \frac{P \cdot l}{\pi\, a^2\, h \cos \gamma}, \quad \tau_{\max} = -\frac{P}{\pi\, a\, h}\left(1 - \frac{l}{a} \operatorname{tg} \gamma\right) \qquad (65).$$

Schließlich seien hier vor allem die Formeln für s i c h s c h w a c h v e r j ü n g e n d e W e l l e n angegeben (Vollkegelstumpf für kleines γ), die sich mit $c \approx 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \gamma$ bei Vernachlässigung höherer Potenzen von $\operatorname{tg} \gamma$ ergeben:

$$\sigma_{\max} = \frac{4\,P\,l}{\pi\, a^3}\left(1 + \frac{2 + \frac{1}{m}}{3\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \frac{a}{l} \operatorname{tg} \gamma\right), \quad \tau_{\max} = -\frac{P\left(3 + \frac{2}{m} - 4\frac{l}{a} \operatorname{tg} \gamma\right)}{2\,\pi\left(1 + \frac{1}{m}\right) a^2} \qquad (66).$$

Andererseits lassen sich die genauen Werte für den H o h l z y l i n d e r ermitteln, indem wir $c \approx 1 - \frac{a^2}{2\,u^2}$, $d \approx 1 - \frac{b^2}{2\,u^2}$ und $u = \infty$ setzen. Die maximale Schubspannung wird

$$\tau_{\max} = -\frac{P\left[\left(3 + \frac{2}{m}\right) a^2 + \left(1 + \frac{2}{m}\right) b^2\right]}{\pi\left(1 + \frac{1}{m}\right)(a^4 - b^4)} \qquad (67).$$

F ü r d e n K e g e l b e i z u s a m m e n g e s e t z t e r B i e g u n g e r g e b e n s i c h m i t h i n g r ö ß e r e B i e g u n g s s p a n n u n g e n, a b e r k l e i n e r e S c h u b s p a n n u n g e n a l s b e i m Z y l i n d e r. Dies erklärt sich in einfacher Weise dadurch, daß beim Kegel die Biegungsspannungen zugleich Querkraftkomponenten besitzen. Die maximale Schubspannung erhöht sich durch eine feine axiale Bohrung um 100 %.

6. Zusammenfassung. Ein neuer Ansatz ermöglicht es, die drei Komponenten des elastischen Verschiebungsvektors allein durch Differentiieren aus vier harmonischen Funktionen abzuleiten. Das zugehörige Gleichungssystem läßt sich in einfacher Weise auf krummlinige Koordinatensysteme übertragen. Es stellt auch dann noch die allgemeine Lösung des elastischen Zustandes dar, wenn eine der vier Funktionen gleich Null gesetzt wird. Als Beispiel wird die Spannungsverteilung im Hohlkegel unter Einzellast angegeben. 365

Theory of Vibration of Buildings During Earthquake.

By *M. Biot* in Louvain (Belgien).

Gebäudeschwingungen bei Erdbeben.

Zusammenfassung. Die Bewegungen eines Gebäudes, das von einem Erdbeben getroffen wird, haben den Charakter vorübergehender Schwingungen. Die Untersuchung derartiger Vorgänge nach dem Heaviside-Verfahren ist den Elektro-Ingenieuren geläufig. Für den Fall der Erdbebenschwingungen wird indessen die Anwendung dieser Methode wegen der Unregelmäßigkeit der Erdbewegung zu mühsam. Außerdem braucht man nicht die Bewegung eines Gebäudes genau zu kennen, sondern nur die Scheitelwerte der Beanspruchung.

Die folgende Arbeit enthält eine Theorie der Schwingungen eines Systems unter einem vorübergehenden Anstoß. Der erste Paragraph enthält die theoretischen Grundlagen. Der Hauptgedanke ist die spektrale Zerleguug des Seismogramms, d. h. es wird die Frequenzverteilung des Erdstoßes untersucht. Dann ist es ziemlich einfach, die Wirkung eines solchen Stoßes auf ein Gebäude zu ermitteln.

Im zweiten Paragraphen wird diese Methode auf die Untersuchung der Erdbebensicherheit eines Gebäudes angewendet, das einen elastischen ersten Stock hat. Eine Tabelle ermöglicht die Berechnung der Schwingungsperioden des Gebäudes. Als Endergebnis erhält man die durch die Elastizität des ersten Stockwerks hervorgerufene Verringerung der Beanspruchungen.

1. General Outlines of the Theory[1]. We shall confine ourselves to general outlines of the mathematical theory and we will neglect the damping. A more detailed account of the theory is given in the appendix.

The analysis starts from the fact that any vibration of an elastic undamped system may always be considered as a superposition of harmonics. Although the method is valid for any type of motion, shear, bending, or torsion, let us only consider for the present the horizontal vibration of a building. This building, like any elastic system, has a certain number of so called „normal modes" of vibration, and to each of them corresponds a certain frequency. When a building vibrates in a normal mode, all the displacements have the same phase, i. e. they all reach the maximum at the same moment. The „shape" of the oscillation is that of standing waves, and the higher the frequency the higher the number of these waves. We will show that any motion can be calculated when we know these modes of vibration.

Consider the ith floor of mass m_i. The amplitude of oscillation of that floor in the mode of order k is called $A_k\, y_{ik}$. These quantities contain an arbitrary constant A_k, corresponding to the fact that a free oscillation has an arbitrary amplitude.

In view of the application of the theory we have to give to these amplitudes certain values and determine these constants so as to satisfy the condition

$$\sum^{i} m_i\, A_k^2\, y^2_{ik} = 1 \,.$$

The amplitudes become then

$$u_{ik} = A_k\, y_{ik} = \frac{y_{ik}}{\sqrt{\sum m_i\, y^2_{ik}}} \,.$$

The amplitudes u_{ik} are then said to be „normalized". We suppose that we also know the frequencies ν_k corresponding to each free oscillation.

The next step is to calculate the statical deflection of the building under a constant horizontal acceleration j_0 that has been applied very slowly. In other words, we have to calculate the deformation that the building would take if the gravity had an horizontal component j_0. In general, this deformation will be very complicated and will be a combined shear, torsion, and bending. The method here developed is valid for any general case, but we will restrict our considerations to the study of horizontal deflections.

By applying the so called property of orthogonality of the deflections u_{ik}, namely,

$$\sum^{i} m_i\, u_{ih}\, u_{ik} = 0 \qquad h \neq k$$

[1]) See also: M. Biot, Theory of elastic systems vibrating under transient impulse with an application to earthquake-proof buildings, Proc. Nat. Acad. Sc. Vol. 19, No. 2, pp. 262–268, Feb. 1933. — This work was done during the author's stay as Research Fellow at the California Institute of Technology.

it can be proved that the statical deflection $\bar{u}_i$ produced by the acceleration j_0 can be expressed as a sum of amplitudes u_{ik} of the normalized free oscillations by the series

$$\bar{u}_i = \sum^{k} \frac{C_k}{\omega_k^2} u_{ik} ,$$

where

$$\omega_k = 2 \pi \nu_k$$

$$C_k = j_0 \sum^{i} m_i u_{ik} .$$

If, instead of a gradual application of the acceleration j_0, it is suddenly applied at time 0, the building is going to vibrate around a new position of equilibrium which is given by the previously considered statical deflection. Hence, the motion of each floor is given by

$$u_i(t) = \sum^{k} \frac{C_k}{\omega_k^2} u_{ik} [1 - \cos \omega_k t] .$$

This shows that when an horizontal acceleration is suddenly applied to a building the maximum deflection is twice the statical one.

From this last formula, we may deduce the motion due to an arbitrary acceleration (see Appendix I). The results are the following:

Let an horizontal acceleration $j_0 \psi(t)$ act upon the building between the instants 0 and T. Consider then the functions of the frequency ν,

$$f_1(\nu) = \int_0^T \psi(\tau) \cos 2 \pi \nu \tau \, d\tau$$

$$f_2(\nu) = \int_0^T \psi(\tau) \sin 2 \pi \nu \tau \, d\tau$$

and

$$F(\nu) = \sqrt{f_1^2(\nu) + f_2^2(\nu)} .$$

After the instant T the motion of the building is composed of a series of free oscillations each of which gives to the different floors an amplitude[2])

$$\frac{C_k u_k}{\omega_k^2} 2 \pi \nu_k F(\nu_k) .$$

The function $F(\nu)$ is nothing but the frequency distribution of the impulse, or its spectral distribution. The function $2 \pi \nu F(\nu)$ is dimensionless and may be called the reduced spectral distribution of the impulse.

Hence we have the following theorem: When an arbitrary horizontal acceleration $j_0 \psi(t)$ of finite duration acts upon a building, the resulting vibration at the end of the impulse is composed of a series of free oscillations each of which has an amplitude equal to the corresponding term $\frac{C_k u_k}{\omega_k^2}$ of the statical deformation due to j_0 and multiplied by the value $2 \pi \nu_k F(\nu_k)$ of the reduced spectral distribution of (ψt) for the corresponding frequency.

If we want to know the amplitudes during the earthquake, we must naturally use a function $F(\nu)$ corresponding to an impulse ending at the moment we consider.

It will be noticed that we consider only the amplitudes of the free oscillations and not their phases. This is justified by the fact that we are not interested in the motion itself of the building, but merely in its maximum amplitude. This maximum is the sum of the amplitudes of each separate free oscillation. It will not always be reached because it supposes that an instant exists for which all the free oscillations have their maximum deflection simultaneously. However, this maximum will many times be nearly reached in a short time, and in any case it is the highest possible value.

Remarks. I. The method may be used for any type of deformation. For instance in the case of torsional deformations. Call M_i the torque produced around the axis, at the ith floor, by a unit horizontal acceleration; then $j_0 M_i$ will be the torque due to an acceleration j_0. The normalized angles of rotation of each floor in the torsional normal

[2]) See Appendix I.

modes being Θ_{ik} and I_i being the moments of inertia of the floors, the rotation due to the statical deformation is

$$\bar{\Theta}_i = \sum^{k} \frac{C_k}{\omega_k^2} \Theta_{ik}$$

with

$$C_k = j_0 \sum^{i} M_i \Theta_{ik}.$$

The condition of normalization of the Θ_{ik} becomes here,

$$\sum^{i} I_i \Theta^2_{ik} = 1 .$$

In order to get the amplitudes of rotation due to an acceleration we must calculate as before the expressions

$$\frac{C_k}{\omega_k^2} \Theta_{ik} 2\pi \nu_k F(\nu_k) .$$

II. The steady state oscillation due to an harmonic horizontal acceleration $j_0 e^{2\pi\nu i t}$ is given for the deflection deformation by

$$y_i = \sum^{k} \frac{C_k u_{ik}}{\omega_k^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} e^{2\pi\nu i t},$$

where $\omega = 2\pi\nu$. This gives an experimental method of measuring the u_{ik} by producing resonance in a model.

III. In order to show the main properties of a spectral curve $F(\nu)$ we calculate its value for a very simple case; we will suppose that $\psi(t)$ is a sine curve $\sin 2\pi N t$ of total length T. The corresponding function $F(\nu)$ has a sharp peak in the vicinity of $\nu = N$ and its approximate value is

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\sin \pi (\nu - N) T}{\pi (\nu - N)} \right| \quad \text{(fig. 1).}$$

This shows that in general a spectral distribution curve will show a certain number of peaks if there exists certain periods in the seismogram (fig. 2).

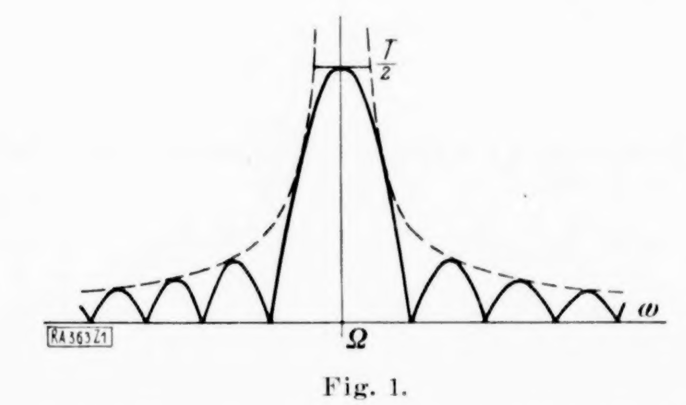


Fig. 1.

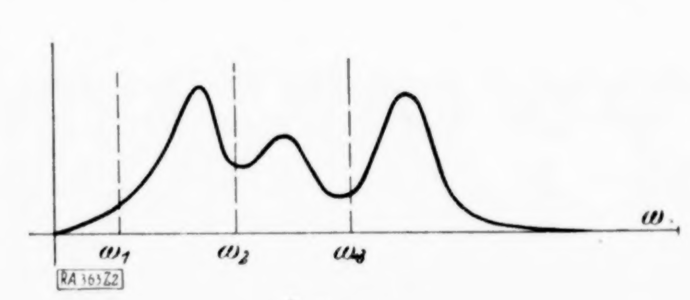


Fig. 2.

According to recent observations[3]) there seems to exist characteristic frequencies of the ground at given locations. These frequencies would be given by the peaks in the spectral curve.

If we possessed a great number of seismogram spectra we could use their envelope as a standard spectral curve for the evaluation of the probable maximum effect on buildings. The spectral curves would be of interest as much to seismologists as to civil engineers.

The direct computation of such spectra might be tedious but automatic electrical methods can be easily imagined such as a photographic record passing in front of a photo-electric cell acting upon a tuned circuit.

2. The Effectiveness of an Elastic First Floor. As an application of the method we will calculate the reduction of stress due to a so called elastic first floor in an earthquake-proof building.

[3]) Suyehiro, Tokyo.

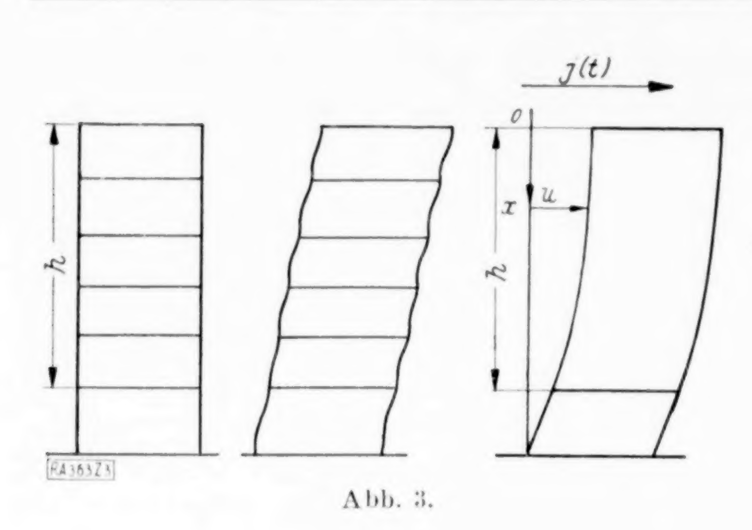


Abb. 3.

Let it be of rectangular shape. We assume that the deformation is an horizontal shear as shown in fig. 3. Furthermore, the shearing rigidity and the mass of each story are supposed to be constant from the second floor to the top. The first floor only will have a different rigidity. In order to simplify the analysis we consider the upper part of the building, i. e. all the stories except the first one as a continuous beam having shearing deformations only.

We use the following notations:

x	coordinate measured downwards from the top as origin
u	horizontal deflection of the building
h	height of the upper part of the building
M	mass of the upper part of the building
n	number of stories of the upper part
$h_1 = \frac{h}{n}$	height of one story
K	force necessary to displace two consecutive floors of a unit length relatively to each other
$m = \frac{M}{n}$	mass density of the equivalent beam
$\mu = K h_1$	rigidity coefficient of the equivalent beam
G	force necessary to displace the second floor of a unit length relatively to the ground
$c = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$	propagation speed of a shear wave in the beam
$t_0 = \frac{h}{c}$	time necessary for such a wave starting from the bottom of the beam to reach the top

$$\frac{t}{t_0} = \tau$$

$$\frac{x}{h} = \xi$$

$$\frac{u}{g\, t_0^2} = y$$

According to the general theory we have to consider the normal modes or free oscillations of the equivalent beam, which are given by the equation,

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

This may be written with dimensionless variables,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}.$$

By putting $y = z(\xi)\, e^{i \lambda \tau}$ we get,

$$\frac{d^2 z}{d \xi^2} + \lambda^2 z = 0.$$

The general solution is

$$z = A \cos \lambda \xi + B \sin \lambda \xi.$$

Consider the boundary conditions,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x = 0$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} = - G u \qquad x = h.$$

Put $R = \frac{G h_1}{\mu}$ ratio of the rigidity of the first story to that of the others, and $a = R n$, n being the number of these other stories; the boundary conditions become

$$\frac{d z}{d \xi} = 0 \qquad \xi = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$\frac{d z}{d \xi} + a z = 0 \qquad \xi = 1 \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

From equation (1) $\quad B = 0 \qquad z = A \cos \lambda \xi$.

From condition (2) $\quad \lambda \operatorname{tg} \lambda = a$.

The roots λ_k of this equation correspond to the free oscillation frequencies of the building. We choose certain values of a corresponding to certain simple values of R and n as follows:

n \ R	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1
15	1,66	2,50	5	
10	1,11	1,66	3,33	10
5	0,556	0,834	1,66	

The values of λ_k as a function of a are given in the following table:

a	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
0	0	π	2π	3π	4π	5π
0,556	0,68	3,31	6,31	9,48	12,60	15,73
0,834	0,80	3,38	6,41	9,51	12,62	15,75
1,11	0,89	3,45	6,45	9,54	12,65	15,77
1,66	1,03	3,58	6,53	9,59	12,69	15,80
2,50	1,15	3,73	6,65	9,67	12,76	15,85
3,33	1,23	3,86	6,74	9,75	12,82	15,91
5,0	1,32	4,04	6,91	9,90	12,93	16,0
10,0	1,44	4,30	7,22	10,18	13,20	16,24
∞	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{2}$

In fig. 4 are plotted the values of λ_k' where $\lambda_k = k\pi + \lambda_k'$. The period T_k corresponding to λ_k is,

$$T_k = \frac{2\pi t_0}{\lambda_k}.$$

It is interesting to compare the fundamental period T_0 to that T_0' which would occur if the building would be perfectly rigid from the second floor to the top, the only elasticity being due to the first floor. We get,

$$M \frac{d^2 u}{d t^2} + G u = 0 \qquad T' = 2\pi \sqrt{\frac{M}{G}} = \frac{2\pi t_0}{\sqrt{a}}.$$

The ratio of frequencies $\frac{f}{f_0'} = \frac{T_0'}{T} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{a}}$ is a function of a.

a	$\frac{f_0}{f_0'}$	a	$\frac{f_0}{f_0'}$
0	1	2,50	0,725
0,556	0,910	3,33	0,674
0,834	0,875	5,0	0,590
1,11	0,840	10,	0,455
1,66	0,800	∞	0

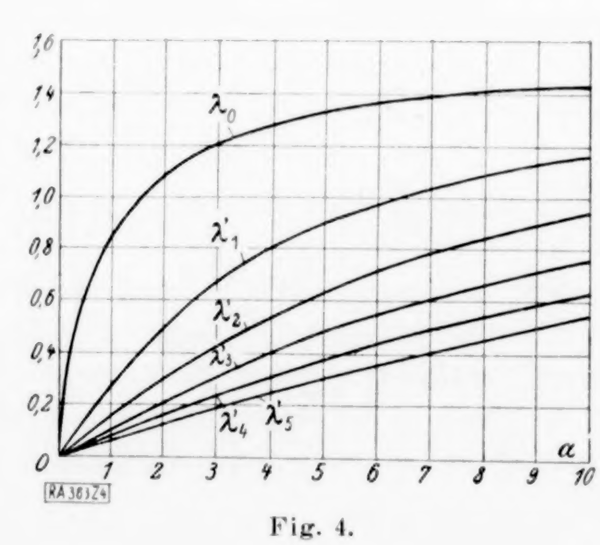


Fig. 4.

The shape of the normal modes is given by

$$u_k(x) = A_k \cos \lambda_k \xi .$$

We have to determine the constants A_k by the condition of normalization which reduces here to the integral

$$m \int_0^h A_k^2 \cos^2 \lambda_k \xi \, d x = 1 \qquad \text{or} \qquad M A_k^2 \int_0^1 \cos^2 \lambda_k \xi \, d \xi = 1 .$$

By integrating and using the equation $\lambda_k \operatorname{tg} \lambda_k = a$

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{\frac{M}{2}\left[1 + \frac{a \cos^2 \lambda_k}{\lambda_k^2}\right]}} .$$

The statical deformation of the beam due to an horizontal acceleration g is then

$$\bar{u}(x) = \sum^k \frac{C_k}{\omega_k^2} u_k(x) ,$$

where

$$C_k = g\, m \int_0^h u_k(x)\, d x = \frac{g\, m\, h}{\sqrt{\frac{M}{2}\left[1 + \frac{a \cos^2 \lambda_k}{\lambda_k^2}\right]}} \int_0^1 \cos \lambda_k \xi \, d \xi$$

$$\int_0^1 \cos \lambda_k \xi \, d \xi = \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k} = \frac{a \cos \lambda_k}{\lambda_k^2} .$$

Since $\omega_k = \frac{\lambda_k}{t_0}$, the statical deformation takes the form

$$\bar{u}(x) = 2\, g\, t_0^2\, a \sum^k \frac{\cos \lambda_k}{\lambda_k^4 \left[1 + \frac{a \cos^2 \lambda_k}{\lambda_k^2}\right]} \cos \lambda_k \xi .$$

Put

$$\frac{2\, a \cos \lambda_k}{\lambda_k^4 \left[1 + \frac{a \cos^2 \lambda_k}{\lambda_k^2}\right]} = B_k .$$

These coefficients are dimensionless and functions of a only. Their values are given in the following table:

a	B_0	B_1	B_2	B_3
0	$\infty \frac{1}{a}$	0	0	0
0,556	2,336	— 0,00890	0,000692	— 0,000138
0,834	1,734	— 0,0116	0,000970	— 0,000208
1,11	1,425	— 0,0137	0,00122	— 0,000272
1,66	1,091	— 0,0166	0,00177	— 0,000386
2,50	0,902	— 0,0191	0,00234	— 0,000544
3,33	0,802	— 0,0203	0,00274	— 0,000682
5,0	0,710	— 0,0210	0,00334	— 0,000912
10,0	0,612	— 0,0212	0,00404	— 0,00125
∞	0,520	— 0,0192	0,00417	— 0,00151

The statical deformation is then given by:

$$\bar{u}(x) = g\, t_0^2 \sum^k B_k \cos \lambda_k \xi .$$

By using this result we are able to find the amplitudes of oscillation produced by an acceleration $g\,\psi(t)$.

We build the reduced spectral intensity $2\pi\nu F(\nu)$ of the function of time $\psi(t)$. The amplitude of each free oscillation of the beam is then

$$V_k(x) = g\, t_0^2\, B_k \cos \lambda_k \xi \cdot 2\pi \nu_k F(\nu_k) .$$

We are also interested in the total shear produced in this beam. The amplitude of shear produced by each mode is

$$S_k = \mu \frac{\partial U_k}{\partial x} = \frac{\mu}{h} \frac{\partial U_k}{\partial \xi}, \qquad S_k = g\, M \cdot B_k\, \lambda_k \sin \lambda_k\, \xi \cdot 2\, \pi\, \nu_k\, F(\nu_k)\,.$$

Replacing $2\,\pi\,\nu_k$ by $\frac{\lambda_k}{t_0}$ we get

$$S_k = -g\, M\, B_k\, \lambda_k^2 \sin \lambda_k\, \xi\, \frac{F(\nu_k)}{t_0}\,.$$

For the fundamental oscillation the shear is maximum at the bottom ($\xi = 1$)

$$S = g\, M\, B_0\, \lambda_0^2 \sin \lambda_0\, \frac{F(\nu_0)}{t_0}\,.$$

For the oscillations of higher order, the maximum value is

$$S_k = g\, M\, B_k\, \lambda_k^2\, \frac{F(\nu_k)}{t_0}\,.$$

Put
$$B_0\, \lambda_0^2 \sin \lambda_0 = C_0(a)\,, \qquad B_k\, \lambda_k^2 = C_k(a)\,.$$

The maximum shear corresponding to each free oscillation is then given by

$$S_k = g\, M\, C_k(a)\, \frac{F(\nu_k)}{t_0}\,.$$

The coefficients $C_k(a)$ are dimensionless and functions of a only. Their values are plotted in fig. 5 and given in the following table:

a	C_0	C_1	C_2	C_3
0	0	0	0	0
0,556	— 0,340	0,0486	— 0,0139	0,00622
0,834	— 0,397	0,0666	— 0,0199	0,00942
1,11	— 0,438	0,0818	— 0,0254	0,0123
1,66	— 0,496	0,107	— 0,0377	0,0177
2,50	— 0,544	0,132	— 0,0517	0,0254
3,33	— 0,572	0,150	— 0,0623	0,0324
5,0	— 0,600	0,172	— 0,0812	0,0451
10,0	— 0,629	0,196	— 0,105	0,071
∞	— 0,642	0,212	— 0,129	0,091

Fig. 5.

We see that the fundamental oscillation is by far the most dangerous, and that, *for given values of the $\nu'_\varkappa$s, the influence of an elastic first floor is important only for values of a smaller than 3.* For example, it would not be in general of great advantage for a seven story building to build an elastic first floor having only 50% of the rigidity of the other floors.

Appendix I.

Vibrating systems under transient impulse. The following theory gives a method of evaluating the action of very random impulses on vibrating systems (i. e. effect of statics on radio-circuits or earthquakes on buildings). In the following text, we will use the language of mechanics.

Consider a one-dimensional continuous elastic system without damping. The free oscillations are given by the solutions of the homogeneous integral equation,

$$y = \omega^2 \int_a^b \varrho(\xi)\, a(x\, \xi)\, y(\xi)\, d\,\xi\,.$$

Due to the nature of the kern there exists an infinite number of characteristic values ω_i of ω and of characteristic functions y_i solutions of this equation. These functions give the shape of the free oscillations of the system. They are orthogonal and have an arbitrary amplitude. This amplitude may be fixed by the condition of normalization,

$$\int_a^b \varrho(\xi)\, y_i^2(\xi)\, d\,\xi = 1\,.$$

We now suppose that certain external forces $f(x)$ are acting on the system, these forces being expressed in such a way that the product of the displacement y by $f(x)$ represents the work done by this force. For example, if $f(x)$ is a moment y will be the angle of rotation around the same axis as the moment at that point.

It can be easily proved that the statical deflection of the system is,

$$y = \Sigma \frac{C_i}{\omega_i^2} y_i \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

where C_i is the Fourier coefficient of the development of $\frac{f(x)}{\varrho(x)}$ in a series of the orthogonal functions y_i,

$$\frac{f(x)}{\varrho(x)} = \Sigma C_i y_i ,$$

hence

$$C_i = \int_0^b f(\xi)\, y_i(\xi)\, d\xi .$$

If the applied forces are variable with time and harmonic of the form $f(x) e^{i\omega t}$ the deflection is expressed by the expansion,

$$y = \Sigma \frac{C_i y_i}{\omega_i^2} \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2} e^{i\omega t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

The amplitude is composed of each of the terms of the statical deformation (1) multiplied by a resonance factor.

The motion due to a sudden application of the forces is of the same type, and can be deduced immediately from the preceding harmonic solution.

By using Heaviside's expansion theorem we get,

$$y_a = \Sigma \frac{C_i y_i}{\omega_i^2} [1 - \cos \omega_i t] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

The amplitude due to a sudden applied force $f(x)$ is composed of a series of oscillations each of which has an amplitude equal to twice the corresponding term of the statical deformation (1).

We will now investigate the action of varying forces of the type $f(x)\, \psi(t)$; these forces are supposed to start their action at the origin of time and to keep on during a finite time T.

Using the Heaviside method, and the indicial admittance (3), the motion after the impulse has disappeared is given by,

$$y_b = \int_0^T \frac{d}{dt} y_a(t-\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau ,$$

$$y_b = \Sigma \frac{C_i y_i}{\omega_i^2} \left\{ \sin \omega_i t \left[\omega_i \int_0^T \psi(\tau) \cos \omega_i \tau\, d\tau\right] - \cos \omega_i t \left[\omega_i \int_0^T \psi(\tau) \sin \omega_i \tau\, d\tau\right] \right\} .$$

This motion is the superposition of free oscillations. Their respective amplitudes can be physically interpreted as follows:

Put

$$f_1(\nu) = \int_0^T \psi(\tau) \cos 2\pi\nu\tau\, d\tau ,$$

$$f_2(\nu) = \int_0^T \psi(\tau) \sin 2\pi\nu\tau\, d\tau ,$$

where ν is the frequency $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

The amplitudes of composing free oscillations may then be written,

$$\frac{C_i y_i}{\omega_i^2} \cdot 2\pi\nu_i \sqrt{f_1^2(\nu_i) + f_2^2(\nu_i)} .$$

Now, according to the Fourier Integral,

$$\psi(t) = 2\int_0^\infty f_1(\nu) \cos 2\pi\nu t\, d\nu + 2\int_0^\infty f_2(\nu) \sin 2\pi\nu t\, d\nu \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

This shows that the expression

$$F(\nu) = \sqrt{f_1^2(\nu) + f_2^2(\nu)}$$

may be considered as the „spectral intensity" curve of the impulse.

The amplitude of each free oscillation due to the transient impulse is,

$$\frac{C_i y_i}{\omega_i^2} \cdot 2\pi \nu_i F(\nu_i) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

The expression $2\pi\nu F(\nu)$ is a dimensionless quantity that we will call „reduced spectral intensity". We then have the following theorem: When a transient impulse acts upon an undamped elastic system, the final motion results from the superposition of free oscillations each of which has an amplitude equal to the corresponding term $\frac{C_i y_i}{\omega_i^2}$ of the statical deformation (1) multiplied by the value of the reduced spectral intensity for the corresponding frequency.

The advantage of this theorem is that for the calculation of the motion it replaces a complicated impulse by a spectral distribution which is always an analytical function of the frequency.

This theorem could also have been established by starting from (2) and using directly the Fourier integral. We will apply this last method in order to generalize the theorem to the case of an elastic system with viscous damping whose motion is defined by the equation

$$m\ddot{y} + a\dot{y} + b^2 y = A\psi(t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

The impulse is supposed to be given as before by the spectral distribution (4). Introducing a complex spectral distribution,

$$\varphi(\nu) = f_1(\nu) - i f_2(\nu)$$

we may write,

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu)\, e^{2\pi i \nu t}\, d\nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

where according to the Fourier integral

$$\varphi(\nu) = \int_0^T \psi(\tau)\, e^{-2\pi i \nu \tau}\, d\tau .$$

The function $\varphi(\nu)$ is holomorphic; its expansion in a power series is

$$\varphi(\nu) = \Sigma \frac{A_n \nu^n}{n!},$$

where

$$A_n = (-2\pi i)^n \int_0^T t^n \psi(t)\, dt .$$

Calling M the largest value of $|\psi(t)|$ and $I(\nu)$ the coefficient of i in the variable ν considered from now on in the complex plane, we have

$$|\varphi(\nu)| < \frac{M}{2\pi I(\nu)}\left[e^{2\pi I(\nu) T} - 1\right].$$

This shows that for $t > T$, $|\varphi(\nu)\, e^{2\pi i \nu t}|$ has an upper limit.

Consider now the elastic system (6) under an harmonic impulse $A e^{2\pi i \nu t}$, the corresponding motion is

$$x(t) = \frac{A e^{2\pi i \nu t}}{8\pi^2 \beta m}\left[\frac{1}{\nu - \nu_1} - \frac{1}{\nu - \nu_2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

The quantities ν_1, and ν_2 are complex frequencies

$$\nu_1 = \alpha i + \beta, \qquad \nu_2 = \alpha i - \beta .$$

The free oscillation of the system is damped and given by

$$e^{-2\pi\alpha t} \cos 2\pi\beta t .$$

According to (7) and (8) the motion due to the impulse $A\,\psi(t)$ will be,

$$y(t) = \frac{A}{8\pi^2 \beta m} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu)\, e^{2\pi i \nu t} \left[\frac{1}{\nu-\nu_1} - \frac{1}{\nu-\nu_2}\right] d\nu .$$

We have seen that $|\varphi(\nu)\, e^{2\pi i \nu t}|$ has an upper limit, and by using then the method of contour integrals and residues, we find

$$y(t) = \frac{A\pi i}{4\pi^2 \beta m} [\varphi(\nu_1)^{2\pi i \nu_1 t} - \varphi(\nu_2)\, e^{2\pi i \nu_2 t}] .$$

At the time T when the impulse has ceased, the amplitude is

$$|y(t)| = \frac{A}{4\pi^2 \beta^2 m} 2\pi\beta\, |\varphi(\alpha i + \beta)|\, e^{-2\pi\alpha T} .$$

The quantity $\frac{A}{4\pi^2 m(\beta^2+\alpha^2)}$ is the deflection for the static deformation due to a force A. This last result generalizes formula (5) to the case of damping. We have to consider a complex frequency $\alpha i + \beta$ and the analytical prolongation $\varphi(\alpha i + \beta)$ of the spectral distribution $\varphi(\nu)$ of $\psi(t)$.

Appendix II.

A method for computing free oscillations in case of non uniform mass and rigidity. Whenever we know the shape y_k of the free oscillations of the building, we can calculate the corresponding frequencies or ω_k by the following method:

Consider the building as a continuous shear-beam and oscillating freely with the frequency of order k. When the amplitude is maximum the kinetic energy is equal to zero and the potential energy is

$$\frac{1}{2}\int_0^h \mu(x) \left(\frac{d y_k}{d x}\right)^2 d x .$$

On the other hand, the potential energy passes through zero when the strain disappears; at that moment the kinetic energy is maximum and has the value

$$\frac{1}{2}\int_0^h m(x)\, \omega_k^2\, y_k^2\, d x .$$

Equating those two expressions we get the value

$$\omega_k^2 = \frac{\int_0^h \mu(x)\left(\frac{d y_k}{d x}\right)^2 d x}{\int_0^h m(x)\, y_k^2\, d x}$$

which is independent of any arbitrary constant multiplying y_k.

The orthogonal functions y_k representing the shape of the free oscillations may be found by the following semi-empirical method. We note that those functions are defined by equation.

$$\frac{d}{d x}\left[\mu(x) \frac{d y_k}{d x}\right] + m(x)\, \omega^2\, y_k = 0 ,$$

which by a change of the independent variable

$$z = \int \frac{d x}{\mu(x)}$$

becomes

$$\frac{1}{\mu[x(z)]} \frac{d^2}{d z^2} [y_k(z)] + m[x(z)]\, \omega^2\, y_k = 0 .$$

This is the equation of buckling under a load P of a beam of moment of inertia

$$I(z) = \frac{P}{E\, m\, \mu\, \omega^2} \, ,$$

If we consider an elastic strip of uniform thickness h, its moment of inertia will have the value I under the condition that the variable width b satisfies the equation

$$\frac{b\,h^3}{12} = I = \frac{P}{E\,m\,\mu\,\omega^2} = \frac{A}{\mu\,m},$$

where A is an arbitrary constant. We may choose for z any arbitrary scale convenient for we are interested only in the shape of the functions.

In order to realize the given boundary conditions, the strip will be repeated symmetrically around a point representing the top of the building (fig. 6). The deformation of the half

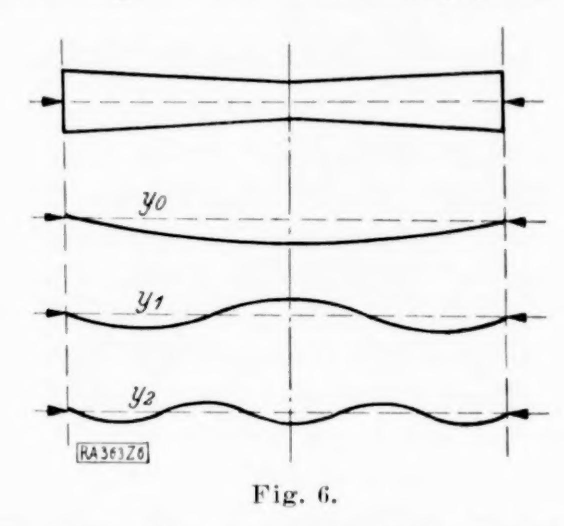


Fig. 6.

strip under various loads will give the corresponding functions y_k. The first deformation only is stable, so that the others will have to be stabilized by a special but very simple device. Knowing the shape of the y_k we then compute the attached frequencies by the method above.

Appendix III.

Method for calculating the acceleration spectrum from a displacement spectrum. Suppose that we know the displacement diagram of the ground, in the form $v\,\varphi(t)$, v being a certain arbitrary length., and T an arbitrary length of time. The acceleration of the ground is

$$j(t) = v\,\varphi''(t) = \frac{v}{T^2}\,\varphi''(t)\,T^2 = j_0\,\psi(t)$$

from there,

$$\varphi''(t)\,T^2 = \psi(t)\,, \qquad j_0 = \frac{v}{T^2}\,.$$

We can easily deduce the spectral distribution of the unknown acceleration diagram $\psi(t)$ from the spectral distribution of the displacement diagram by the following considerations:

Consider the spectral function $G(\nu)$ of $\varphi(t)$

$$G(\nu) = \sqrt{g_1^{\,2}(\nu) + g_2^{\,2}(\nu)}\,,$$

$$g_1(\nu) = \int_0^T \varphi(\tau)\cos 2\,\pi\,\nu\,\tau\,d\tau\,,$$

$$g_2(\nu) = \int_0^T \varphi(\tau)\,\sin 2\,\pi\,\nu\,\tau\,d\tau\,.$$

From the Fourier integral we get,

$$\varphi(t) = 2\int_0^\infty g_1(\nu)\cos 2\,\pi\,\nu\,t\,d\nu + 2\int_0^\infty g_2(\nu)\sin 2\,\pi\,\nu\,t\,d\nu\,,$$

$$\psi(t) = \varphi''(t)\,T^2 = 2\int_0^\infty (2\,\pi\,\nu\,T)^2\,g_1(\nu)\cos 2\,\pi\,\nu\,t\,d\nu + 2\int_0^\infty (2\,\pi\,\nu\,T)^2\,g_2(\nu)\sin 2\,\pi\,\nu\,t\,d\nu\,.$$

This shows that the spectral distribution $F(\nu)$ of the acceleration diagram $\psi(t)$ is

$$F(\nu) = (2\,\pi\,\nu\,T)^2\,G(\nu)\,.$$

This work was undertaken at the suggestion of Prof. Th. von Kármán. The author wishes to express his appreciation of the continual interest Prof. von Kármán and Prof. R. R. Martel have taken in its progress. 363

(California Institute of Technology, 1932.)

Fehlerabschätzung für das Störmersche Integrationsverfahren.

Von *Günther Schulz* in Berlin-Wilmersdorf.

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.)

Zur Durchführung der numerischen Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \ddot{x} = f(x, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

deren rechte Seite die erste Ableitung $\frac{d x}{d t}$ nicht enthält, hat sich ein von C. Störmer (Oslo) angegebenes Verfahren[1]), das sich ohne weiteres auch auf Systeme solcher Differentialgleichungen übertragen läßt, als besonders geeignet erwiesen. Mit ihm haben Prof. Störmer und seine Mitarbeiter zur Bestätigung seiner Theorie des Nordlichts in langjähriger Arbeit eine große Anzahl Bahnkurven von Elektronen im magnetischen Feld der Erde berechnet[2]). Dabei hat sich das Verfahren immer wieder von neuem durch seine leichte, bequeme Anwendbarkeit und die Genauigkeit der erhaltenen Ergebnisse bewährt. Seine Bedeutung für die praktische Integration der Bewegungsgleichungen der Mechanik, falls die wirkenden Kräfte nur von Ort und Zeit abhängen, liegt daher auf der Hand. Die vorliegende Arbeit gibt erstmalig eine exakte Abschätzung des bei Verwendung der Störmerschen Integrationsformel begangenen Fehlers sowohl für die einzelne Differentialgleichung (1) als auch für Systeme solcher Gleichungen. Bei Störmer findet sich in den angegebenen Arbeiten nur eine Abschätzung der Größenordnung des Fehlers für einen Punkt der die Integralkurve approximierenden Punktfolge unter der Voraussetzung, daß die vorhergehenden Punkte fehlerfrei sind[3]).

Im Abschnitt **1** wird zunächst Störmers Hauptformel mit Rücksicht auf die folgende Fehlerabschätzung auf eine neue Weise abgeleitet und ihre praktische Anwendung kurz geschildert. Es zeigt sich, daß dieses Verfahren, das ebenso wie das von J. C. Adams angegebene[4]), mit dem es im Grundgedanken weitgehend übereinstimmt, sukzessive Extrapolationen benutzt. Während aber bei Benutzung des Adamsschen Verfahrens die obige Differentialgleichung zweiter Ordnung durch Einführung von $\dot{x} = y$ in ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $x(t)$ und $y(t) = \dot{x}(t)$ verwandelt werden muß, ist dies bei Verwendung der Störmerschen Formel unnötig, die Berechnung von $\dot{x}(t)$ wird vielmehr erspart, und man erhält unmittelbar Werte für das gesuchte Integral der Differentialgleichung (1). Ist ein System von Differentialgleichungen, etwa

$$\ddot{x} = f(x, y, t), \qquad \ddot{y} = g(x, y, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gegeben, so fällt diese Ersparnis für die Rechnung noch stärker ins Gewicht. Die in **2** und **3** gegebene Fehlerabschätzung verwendet mit den erforderlichen Verallgemeinerungen Methoden, die R. v. Mises[5]) bei der Herleitung einer Fehlerformel für das Adamssche Verfahren benutzt hat (Trennung von Quadratur- und Interpolationsfehler, Angabe einer Differenzengleichung für die Fehlerschranken, Majorisierung der Fehlerschranken durch eine Partikularlösung dieser Differenzengleichung). In **4** werden die erhaltenen Formeln auf Systeme von Differentialgleichungen ausgedehnt, wobei sich eine interessante Anwendung einiger Sätze von G. Frobenius über Matrizen mit positiven Elementen ergibt. Schließlich sind als Beispiel in **5** für eine dem Institut von Herrn Prof. Störmer freundlicherweise zur Verfügung gestellte Berechnung der Bahnkurve eines Elektrons die Ergebnisse der Fehlerabschätzung nach den hier gegebenen Formeln angegeben[6]).

[1]) C. Störmer: Archives des sciences physiques et naturelles, 4. pér., tome **24** (Genève 1907), p. 5—18, 113—158, 221—247, 317—364, insbesondere p. 221—235. Das Verfahren ist ferner in folgenden Arbeiten von C. Störmer dargestellt: Skrifter utg. av Videnskaps-Selskapet i Kristiania (Mat.-naturvid. Klasse) 1913, Nr. 4, insbesondere S. 1 bis 11; Nr. 14, insbesondere S. 41 bis 57. — Norsk matem. Tidskr. **3**, 1921, S. 121 bis 134. — Comptes rendus du Congrès intern. des mathém. Strasbourg 1921 (Toulouse 1921), p. 243—257.

[2]) Die rechnerisch gefundenen Bahnen sind übrigens kürzlich mit sehr guter Übereinstimmung von E. Brüche auch experimentell hergestellt worden. Vgl. C. Störmer: Ztschr. f. Astrophys. **1**, 1930, S. 237 bis 274, wo auch weitere Literatur zu finden ist.

[3]) C. Störmer: Skrifter utg. av Videnskaps-Selskapet i Kristiania (Mat.-naturvid. Klasse) 1913, Nr. 14, S. 57.

[4]) F. Bashforth, J. C. Adams: An attempt to test the theories of capillary action, Cambridge 1883, p. 15—21, 43—46, 58—62. Das Adamssche Verfahren ist auch in der in Fußnote [5]) angeführten Arbeit von R. v. Mises geschildert.

[5]) R. v. Mises: Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. **10**, 1930, S. 81 bis 92.

[6]) Die Arbeit von J. Tamarkine: Sur la méthode de C. Störmer pour l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires, Math. Ztschr. **16**, 1923, S. 214 bis 219, befaßt sich nicht mit dem eigentlichen Störmerschen, sondern mit dem Adamsschen Verfahren.

1. Ableitung der Störmerschen Formel. Von der rechten Seite der gegebenen Differentialgleichung (1) sei vorausgesetzt, daß sie der Lipschitzbedingung

$$|f(x,t)-f(x^*,t)| \leqq \varkappa\,|x-x^*| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

für beliebige x, x^*, t eines gewissen Bereiches der $x \cdot t$-Ebene genüge; dabei ist $\varkappa$ eine gewisse Konstante. Alle Verfahren der numerischen Integration bestehen darin, daß anstatt des zu gewissen Anfangswerten gehörigen Integrals $x(t)$ der Differentialgleichung eine Folge von Näherungswerten $x_1, x_2, x_3, \ldots$, die den Werten $t_1, t_2, t_3, \ldots$ der unabhängigen Veränderlichen t entsprechen, berechnet werden. Die dabei gemachten Fehler seien

$$\varepsilon_\nu = x_\nu - x(t_\nu) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Es sei ferner $t_{\nu+1} - t_\nu = \Delta t = h$ als Schrittweite angenommen. Die Integration sei bereits bis zur Stelle $t = t_n$ durchgeführt, d. h. es seien schon Näherungswerte $\ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ für die wahren Funktionswerte $\ldots, x(t_{n-2}), x(t_{n-1}), x(t_n)$ bekannt, ebenso die begangenen Fehler $\ldots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$ oder wenigstens obere Schranken ihrer Absolutbeträge[7]). Die Störmersche Formel, die wir jetzt ableiten, ist eine Vorschrift zur Berechnung von x_{n+1} aus den bereits bekannten Werten. Einmalige Integration von (1) liefert

$$\dot{x}(t_n) - \dot{x}(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x,t)\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

eine zweimalige Integration ergibt

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) - \dot{x}(t_n)(t_{n+1}-t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\varrho \int_{t_n}^{\varrho} f(x,t)\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Ersetzen wir in Gl. (6) n durch $n-1$ und subtrahieren die so entstehende Gleichung von Gl. (6) unter Berücksichtigung von Gl. (5), so erhalten wir

$$\Delta^2 x(t_{n+1}) = \Delta t \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x,t)\,dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\varrho \int_{t_n}^{\varrho} f(x,t)\,dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} d\varrho \int_{t_{n-1}}^{\varrho} f(x,t)\,dt \quad . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Hierbei sind — wie überall in dieser Arbeit — die Δ rückwärtsgenommene Differenzen, die durch

$$\Delta u_n = u_n - u_{n-1}, \qquad \Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n-1}, \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

definiert sind und bisweilen auch mit ∇ bezeichnet werden[8]). Nun ersetzen wir in Gl. (7) $f(x,t)$ durch das Interpolationspolynom r-ten Grades in t (in der Lagrangeschen Form), das an den $r+1$ Stellen $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-r}$ die Funktionswerte $f(x(t_n), t_n)$, $f(x(t_{n-1}), t_{n-1})$, $\ldots$, $f(x(t_{n-r}), t_{n-r})$ annimmt, und rechnen die Integrale, die im Integranden Polynome in t enthalten, aus, was gewisse Zahlenkoeffizienten α ergibt. Ersetzen wir ferner auf beiden Seiten alle $x(t_\nu)$ durch x_ν, so entsteht

$$\Delta^2 x_{n+1} = h^2 \Big[\sum_{\varrho=0}^{r} \alpha'_{r\varrho} f_{n-\varrho} + \sum_{\varrho=0}^{r} \alpha''_{r\varrho} f_{n-\varrho} - \sum_{\varrho=0}^{r} \alpha'''_{r\varrho} f_{n-\varrho}\Big] = h^2 \sum_{\varrho=0}^{r} \bar{\alpha}_{r\varrho} f_{n-\varrho} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

mit $\alpha'_{r\varrho} + \alpha''_{r\varrho} - \alpha'''_{r\varrho} = \bar{\alpha}_{r\varrho}$. Zur Abkürzung ist hier $f(x_\nu, t_\nu) = f_\nu$ gesetzt worden. Die α' rühren von dem ersten Integral in Gl. (7) her, die α'' vom ersten Doppelintegral, die α''' vom zweiten Doppelintegral. Die erhaltene Näherungsformel ist bereits die Störmersche Formel für den „Näherungsgrad" r in der Gestalt, wie sie unserer Fehlerabschätzung zugrunde gelegt wird. Für die praktische Rechnung ordnen wir nicht nach den Funktionswerten $f_{n-r}, \ldots, f_{n-1}, f_n$, sondern nach den Differenzen $f_n, \Delta f_n, \ldots, \Delta^r f_n$ und erhalten so in

$$\Delta^2 x_{n+1} = h^2 (\bar{\beta}_0 f_n + \bar{\beta}_1 \Delta f_n + \bar{\beta}_2 \Delta^2 f_n + \ldots + \bar{\beta}_r \Delta^r f_n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

die Hauptformel, nach der gerechnet wird, in der Gestalt, wie sie von Störmer angegeben worden ist. Die auftretenden Koeffizienten $\bar{\alpha}_{r\varrho}$ und $\bar{\beta}_\varrho$ hängen durch die Beziehungen

[7]) Diese Anfangswerte und die Abschätzung ihrer Fehler muß man sich auf andere Weise verschaffen, vgl. dazu R. v. Mises: a.a.O. S. 89 und Günther Schulz: Ztschr. f. ang. Math. u. Mech. 12, 1932, S. 44 bis 59, insbesondere S. 52 ff.

[8]) Man beachte, daß in den Arbeiten von C. Störmer die Δ vorwärtsgenommene, durch $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ definierte Differenzen bedeuten.

$$\left.\begin{array}{l}
\bar{a}_{r0} = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_3 + \ldots + \bar{\beta}_r \\
\bar{a}_{r1} = -\binom{1}{1}\bar{\beta}_1 - \binom{2}{1}\bar{\beta}_2 - \binom{3}{1}\bar{\beta}_3 - \ldots - \binom{r}{1}\bar{\beta}_r \\
\bar{a}_{r2} = \binom{2}{2}\bar{\beta}_2 + \binom{3}{2}\bar{\beta}_3 + \ldots + \binom{r}{2}\bar{\beta}_r \\
\bar{a}_{r3} = -\binom{3}{3}\bar{\beta}_3 - \ldots - \binom{r}{3}\bar{\beta}_r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

zusammen, ihre Zahlenwerte sind

$$\bar{a}_{10} = 1, \quad \bar{a}_{11} = 0$$

$$\bar{a}_{20} = \frac{13}{12}, \quad \bar{a}_{21} = -\frac{1}{6}, \quad \bar{a}_{22} = \frac{1}{12}$$

$$\bar{a}_{30} = \frac{7}{6}, \quad \bar{a}_{31} = -\frac{5}{12}, \quad \bar{a}_{32} = \frac{1}{3}, \quad \bar{a}_{33} = -\frac{1}{12}$$

$$\bar{a}_{40} = \frac{299}{240}, \quad \bar{a}_{41} = -\frac{11}{15}, \quad \bar{a}_{42} = \frac{97}{120}, \quad \bar{a}_{43} = -\frac{2}{5}, \quad \bar{a}_{44} = \frac{19}{240}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\bar{\beta}_0 = 1, \quad \bar{\beta}_1 = 0, \quad \bar{\beta}_2 = \frac{1}{12}, \quad \bar{\beta}_3 = \frac{1}{12}, \quad \bar{\beta}_4 = \frac{19}{240}, \quad \bar{\beta}_5 = \frac{3}{40}.$$

Die Angabe der Werte von $a'_{r\varrho}$, $a''_{r\varrho}$, $a'''_{r\varrho}$ ist überflüssig. Als Probe hat man

$$\sum_{\varrho=0}^{r} \bar{a}_{r\varrho} = 1, \qquad \text{da} \quad \sum_{\varrho=0}^{r} a'_{r\varrho} = 1, \quad \sum_{\varrho=0}^{r} a''_{r\varrho} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{\varrho=0}^{r} a'''_{r\varrho} = \frac{1}{2}.$$

Die Verwendung der Störmerschen Formel soll der Kürze halber gleich für das System (2) unter Annahme des Näherungsgrades $r = 3$ gezeigt werden.

t_{n-4}	x_{n-4}		$\Delta^2 x_{n-3}$	f_{n-4}		$\Delta^2 f_{n-3}$		y_{n-4}		$\Delta^2 y_{n-3}$	g_{n-4}		$\Delta^2 g_{n-3}$	
		Δx_{n-3}			Δf_{n-3}		$\Delta^3 f_{n-2}$		Δy_{n-3}			Δg_{n-3}		$\Delta^3 g_{n-2}$
t_{n-3}	x_{n-3}		$\Delta^2 x_{n-2}$	f_{n-3}		$\Delta^2 f_{n-2}$		y_{n-3}		$\Delta^2 y_{n-2}$	g_{n-3}		$\Delta^2 g_{n-2}$	
		Δx_{n-2}			Δf_{n-2}		$\Delta^3 f_{n-1}$		Δy_{n-2}			Δg_{n-2}		$\Delta^3 g_{n-1}$
t_{n-2}	x_{n-2}		$\Delta^2 x_{n-1}$	f_{n-2}		$\Delta^2 f_{n-1}$		y_{n-2}		$\Delta^2 y_{n-1}$	g_{n-2}		$\Delta^2 g_{n-1}$	
		Δx_{n-1}			Δf_{n-1}		$\Delta^3 f_n$		Δy_{n-1}			Δg_{n-1}		$\Delta^3 g_n$
t_{n-1}	x_{n-1}		$\Delta^2 x_n$	f_{n-1}		$\Delta^2 f_n$		y_{n-1}		$\Delta^2 y_n$	g_{n-1}		$\Delta^2 g_n$	
		Δx_n			Δf				Δy_n			Δg_n		
t_n	x_n		$\Delta^2 x_{n+1}$	f_n				y_n		$\Delta^2 y_{n+1}$	g_n			
t_{n+1}														

Ist die Integration bis zur Stelle t_n, zu der die Funktionsnäherungswerte x_n, y_n gehören, bereits vorgeschritten, so können beide Differenzenschemata bis zur stark gezeichneten Linie berechnet werden. Formel (10) und die gleichgebaute für $\Delta^2 y_{n+1}$, die auf der rechten Seite die g-Differenzen statt der f-Differenzen enthält, gestatten dann aus f_n, Δf_n, $\Delta^2 f_n$, $\Delta^3 f_n$, g_n, Δg_n, $\Delta^2 g_n$, $\Delta^3 g_n$ die Werte $\Delta^2 x_{n+1}$, $\Delta^2 y_{n+1}$ zu berechnen. Die Differenzenschemata können sodann durch Berechnung von Δx_{n+1}, x_{n+1}, Δy_{n+1}, y_{n+1}, f_{n+1}, Δf_{n+1}, $\Delta^2 f_{n+1}$, $\Delta^3 f_{n+1}$, g_{n+1}, Δg_{n+1}, $\Delta^2 g_{n+1}$, $\Delta^3 g_{n+1}$ in der angegebenen Reihenfolge vervollständigt werden. Für die praktische Rechnung empfiehlt es sich, statt der f_ν, g_ν die Größen $\xi_\nu = h^2 f_\nu$, $\eta_\nu = h^2 g_\nu$ einzuführen und für diese Werte die Differenzenschemata zu bilden.

2. Rekursive Abschätzung des Fehlers. Zur Durchführung der Fehlerabschätzung subtrahieren wir Gl. (7) von Gl. (9) und addieren die Identität

$$0 = h^2 \sum_{\varrho=0}^{r} (a'_{r\varrho} + a''_{r\varrho} - a'''_{r\varrho})\, f(x(t_{n-\varrho}), t_{n-\varrho}) - h^2 \sum_{\varrho=0}^{r} \bar{a}_{r\varrho}\, f(x(t_{n-\varrho}), t_{n-\varrho}) \quad . \quad . \quad (12).$$

Nach Einführung der Fehler (4) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 \varepsilon_{n+1} = {} & h^2 \sum_{\varrho=0}^{r} \bar{a}_{r\varrho} [f(x_{n-\varrho}, t_{n-\varrho}) - f(x(t_{n-\varrho}), t_{n-\varrho})] \\ & + h \left[h \sum_{\varrho=0}^{r} \alpha'_{r\varrho} f(x(t_{n-\varrho}), t_{n-\varrho}) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x, t)\, dt \right] \\ & + \left[h^2 \sum_{\varrho=0}^{r} \alpha''_{r\varrho} f(x(t_{n-\varrho}), t_{n-\varrho}) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\varrho \int_{t_n}^{\varrho} f(x, t)\, dt \right] \\ & - \left[h^2 \sum_{\varrho=0}^{r} \alpha'''_{r\varrho} f(x(t_{n-\varrho}), t_{n-\varrho}) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} d\varrho \int_{t_{n-1}}^{\varrho} f(x, t)\, dt \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13).$$

Die Maxima der Absolutbeträge der letzten drei eckigen Klammern für alle in Betracht kommenden Intervalle seien durch c_r', c_r'', c_r''' abgeschätzt; die erste eckige Klammer in Gl. (13) schätzen wir mittels der Lipschitzbedingung ab und erhalten

$$|\Delta^2 \varepsilon_{n+1}| \leq \varkappa h^2 \sum_{\varrho=0}^{r} |\bar{a}_{r\varrho} \varepsilon_{n-\varrho}| + c_r \qquad \text{mit} \qquad c_r = c_r' + c_r'' + c_r''' \quad \ldots (14).$$

Um einen Ausdruck für c_r', c_r'', c_r''' zu gewinnen, beachte man, daß jede der drei letzten eckigen Klammern in Gl. (13) den Unterschied zwischen einem Integral über $f(x(t), t)$ und dem entsprechenden Integral über das Interpolationspolynom r-ten Grades darstellt, das an den Stellen $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-r}$ dieselben Funktionswerte annimmt. Das Restglied der Interpolationsformel lautet

$$\frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\tau) \cdot (t - t_n)(t - t_{n-1}) \ldots (t - t_{n-r}),$$

wobei $f^{(r+1)}(\tau)$ die $(r+1)$-te Ableitung von $f(x(t), t)$ nach t an einer Zwischenstelle τ zwischen $t, t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-r}$ ist. Wir können daher setzen

$$c_r' = h \frac{1}{(r+1)!} \cdot |f^{(r+1)}|_{\max} \cdot \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t - t_n)(t - t_{n-1}) \ldots (t - t_{n-r})\, dt \right| \quad \ldots (15),$$

oder, wenn $t - t_n = h u$ gesetzt wird,

$$c_r' = \frac{h^{r+3}}{(r+1)!} \cdot |f^{(r+1)}|_{\max} \cdot \left| \int_{-1}^{0} u(u+1) \ldots (u+r)\, du \right| \quad \ldots\ldots\ldots (16').$$

Analog ergibt sich

$$c_r'' = \frac{h^{r+3}}{(r+1)!} \cdot |f^{(r+1)}|_{\max} \cdot \left| \int_0^1 d\sigma \int_0^{\sigma} u(u+1) \ldots (u+r)\, du \right| \quad \ldots\ldots (16''),$$

$$c_r''' = \frac{h^{r+3}}{(r+1)!} \cdot |f^{(r+1)}|_{\max} \cdot \left| \int_{-1}^{0} d\sigma \int_{-1}^{\sigma} u(u+1) \ldots (u+r)\, du \right| \quad \ldots\ldots (16''').$$

Die Anwendung des Mittelwertsatzes ist statthaft, da die Integranden in den Integrationsintervallen ihre Vorzeichen nicht wechseln. Die in den Gl. (16'), (16''), (16''') in den Absolutstrichen stehenden Integrale bezeichnen wir mit I_r', I_r'', I_r''' ($I_r' < 0$, $I_r'' > 0$, $I_r''' < 0$) und geben nachstehend die Zahlenwerte. Wir haben also

$$c_r = \frac{h^{r+3}}{(r+1)!} \cdot |f^{(r+1)}|_{\max} \cdot I_r \qquad \text{mit} \qquad I_r = |I_r'| + |I_r''| + |I_r'''| \quad \ldots (17).$$

$$r=1: \quad I_1' = -\frac{1}{6}, \qquad I_1'' = \frac{1}{4}, \qquad I_1''' = -\frac{1}{12}, \qquad I_1 = \frac{1}{2}$$

$$r=2: \quad I_2' = -\frac{1}{4}, \qquad I_2'' = \frac{19}{30}, \qquad I_2''' = -\frac{7}{60}, \qquad I_2 = 1$$

$$r=3: \quad I_3' = -\frac{19}{30}, \qquad I_3'' = \frac{9}{4}, \qquad I_3''' = -\frac{17}{60}, \qquad I_3 = \frac{19}{6}$$

$$r=4: \quad I_4' = -\frac{9}{4}, \qquad I_4'' = \frac{863}{84}, \qquad I_4''' = -\frac{41}{42}, \qquad I_4 = \frac{27}{2}.$$

Zur Vereinfachung setzen wir in Gl. (14)

$$\varkappa h^2 \cdot |\bar{a}_{r\varrho}| = A_\varrho \quad . . . . (18)$$

und erhalten

$$|\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}| \leq A_0 |\varepsilon_n| + A_1 |\varepsilon_{n-1}| + \ldots + A_r |\varepsilon_{n-r}| + c_r \qquad (n = r, r+1, \ldots) \quad (19).$$

Die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_r, c_r$ auf der rechten Seite sind sämtlich nichtnegativ. Als bekannt müssen wir die Fehler $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ oder wenigstens obere Schranken ihrer Absolutbeträge annehmen; es sei

$$|\varepsilon_0| \leq X_0, \quad |\varepsilon_1| \leq X_1, \quad \ldots, \quad |\varepsilon_r| \leq X_r.$$

Mit Hilfe der Ungleichung (19) soll nun eine Gleichung zur rekursiven Berechnung oberer Schranken $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots$ hergeleitet werden, so daß $|\varepsilon_{r+1}| \leq X_{r+1}$, $|\varepsilon_{r+2}| \leq X_{r+2}, \ldots$ gilt. Für das Folgende führen wir noch zur Abkürzung ein

$$\sigma_\nu = |\varepsilon_0| + |\varepsilon_1| + \ldots + |\varepsilon_\nu|, \qquad S_\nu = X_0 + X_1 + \ldots + X_\nu, \qquad \sigma_\nu \leq S_\nu \quad . . . (20).$$

In der Ungleichung (19) setzen wir an Stelle von n die Werte $r, r+1, r+2, \ldots, n-1, n$ und addieren diese $n - r + 1$ Ungleichungen und dazu noch die Ungleichung

$$|\varepsilon_r - \varepsilon_{r-1}| \leq X_r + X_{r-1} \quad . . . . (21).$$

In der so entstandenen Ungleichung wird die linke Seite verkleinert, wenn wir dort $|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|$ schreiben, was wir noch weiter zu $|\varepsilon_{n+1}| - |\varepsilon_n|$ verkleinern. Wir erhalten schließlich

$$\left.\begin{aligned} |\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| + A_0(\sigma_n - \sigma_{r-1}) + A_1(\sigma_{n-1} - \sigma_{r-2}) + \ldots + A_{r-1}(\sigma_{n-r+1} - \sigma_0) \\ + A_r \sigma_{n-r} + (n - r + 1) c_r + X_r + X_{r-1} \qquad (n = r, \ r+1, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (22).$$

Rechts stehen hier ebenfalls nur positive Glieder. Denken wir uns diese Ungleichung zunächst für $n = r$ hingeschrieben und rechts $|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_r|$ durch $X_0, X_1, \ldots, X_r$, also $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ durch $S_0, S_1, \ldots, S_r$ ersetzt, dann ist die rechte Seite eine obere Schranke von $|\varepsilon_{r+1}|$, die wir mit X_{r+1} bezeichnen wollen. Führen wir die gleiche Überlegung für $n = r+1, \ r+2, \ldots$ durch, dann erkennen wir, daß aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1} = X_n + A_0(S_n - S_{r-1}) + A_1(S_{n-1} - S_{r-2}) + \ldots + A_{r-1}(S_{n-r+1} - S_0) \\ + A_r S_{n-r} + (n - r + 1) c_r + X_r + X_{r-1} \qquad (n = r, \ r+1, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (23)$$

rekursiv eine Folge oberer Schranken $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots$ für $|\varepsilon_{r+1}|, |\varepsilon_{r+2}|, \ldots$ gewonnen wird. Für die praktische Berechnung ist eine andere Formel günstiger, die man erhält, wenn in Gl. (23) n durch $n - 1$ ersetzt und die entstehende Gleichung von Gl. (23) abgezogen wird. Man erhält so

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1} = 2X_n - X_{n-1} + A_0 X_n + A_1 X_{n-1} + \ldots + A_r X_{n-r} + c_r \\ (n = r+1, r+2, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Man beachte, daß diese Gleichung auf Grund ihrer Herleitung nicht für $n = r$ gilt. Um X_{r+1} zu berechnen, muß man auf Gl. (23) zurückgehen. Diese lautet im Spezialfall $n = r$

$$X_{r+1} = 2X_r + X_{r-1} + A_0 X_r + A_1 X_{r-1} + \ldots + A_r X_0 + c_r \quad . . . . . . (25),$$

unterscheidet sich also von Gl. (24) durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes auf der rechten Seite. Damit ist die Fehlerabschätzung grundsätzlich erledigt.

Der Umweg über die durch Aufsummierung aus (19) entstehende Ungleichung (22) und über die darauffolgende Differenzenbildung, die zu (24) führt, ist nicht zu vermeiden, da man unmittelbar aus (19) nur eine Rekursionsformel $X_{n+1} = 2X_n + X_{n-1} + \ldots$ (mit dem Pluszeichen auf der rechten Seite, während (24) dort ein Minuszeichen hat!) folgern könnte, die wesentlich größere, praktisch nicht brauchbare Schranken liefern würde.

Setzen wir beispielsweise (für den Fall $r = 4$) $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$, so folgt aus Gl. (25) und (17)

$$|\varepsilon_5| \leq \frac{9}{80} h^7 \cdot |f^{(5)}|_{\max}.$$

Allgemein hat also die Fehlerschranke für einen Punkt die Größenordnung h^{r+3}, wenn die vorangehenden Punkte fehlerfrei sind. C. Störmer kommt an der in der Fußnote [3]) genannten Stelle auf anderem Wege unter Vernachlässigung höherer Potenzen von h zu dem etwas günstigeren Zahlenwert $\frac{3}{40}$ an Stelle des obigen $\frac{9}{80}$.

3. Independente Abschätzung des Fehlers. Während die Benutzung der Gl. (24) als Rekursionsformel erfordert, daß für die Berechnung einer Schranke X_n für den Fehler $|\varepsilon_n|$ sämtliche vorangehenden Schranken bis X_{n-1} schon bekannt sein müssen, werden wir jetzt eine andere Formel angeben, die $|\varepsilon_n|$ abzuschätzen gestattet unabhängig von der Kenntnis der Schranken für die früheren Fehler. Dazu gehen wir auf die Differenzengleichung (24) zurück. Sobald aus Gl. (25) X_{r+1} berechnet ist, können jetzt $X_1, X_2, \ldots, X_{r+1}$ als die gegebenen Anfangswerte angesehen werden, die zusammen mit der Gl. (24) eine Lösung X_n eindeutig bestimmen. Wir werden eine andere einfach gebaute Lösung X_n' der Differenzengleichung (24) angeben (die natürlich zu anderen Anfangswerten gehört), so daß stets $X_n' \geqq X_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ist. Damit ist ebenfalls eine Abschätzung für die Fehler $|\varepsilon_n|$ gegeben, die allerdings im allgemeinen ungünstiger sein wird. Die zu benutzende Lösung X_n' der Differenzengleichung (24) setzen wir zusammen aus einer partikulären Lösung $C z_0^n$ der zugehörigen homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung $-c_r : (A_0 + A_1 + \ldots + A_r)$ der inhomogenen Gleichung. Dabei ist z_0 diejenige Wurzel der Gleichung

$$z^{r+1} - 2z^r + z^{r-1} = A_0 z^r + A_1 z^{r-1} + \ldots + A_{r-1} z + A_r \quad \ldots \ldots \quad (26),$$

die reell und > 1 ist. (Um zu zeigen, daß es stets genau eine solche gibt, dividiere man Gl. (26) durch z^r, setze $\frac{1}{z} = \zeta$ und berücksichtige, daß $A_0, A_1, \ldots, A_r$ nichtnegativ sind.) Nun gilt der leicht zu beweisende Satz: Sind X_n und X_n' zwei Lösungen der Differenzengleichung (24) und setzen wir $X_n' - X_n = \delta_n$, dann ist

$$\delta_1 \geqq 0, \quad \delta_2 \geqq 0, \quad \ldots, \quad \delta_r \geqq 0, \quad \delta_{r+1} \geqq 0, \quad \delta_{r+1} - \delta_r \geqq 0 \quad \ldots \quad (27)$$

hinreichend dafür, daß $\delta_n \geqq 0$, also $X_n' \geqq X_n$ für alle n ist. Wir wählen daher in

$$X_n' = C z_0^n - \frac{c_r}{A_0 + A_1 + \ldots + A_r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

die Konstante C derart, daß die Bedingungen (27) erfüllt sind, daß also

$$X_1' \geqq X_1, \quad X_2' \geqq X_2, \quad \ldots, \quad X_r' \geqq X_r, \quad X'_{r+1} \geqq X_{r+1}, \quad X'_{r+1} - X_{r+1} \geqq X_r' - X_r$$

gilt, wobei die $X_1, X_2, \ldots, X_{r+1}$ die bekannten Anfangswerte sind. Diese Wahl ist stets möglich. Man kann beispielsweise wählen

$$C = X + \frac{c_r}{A_0 + A_1 + \ldots + A_r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29),$$

wobei X eine gemeinsame obere Schranke von $X_1, X_2, \ldots, X_{r+1}$ ist. Bei dieser Wahl von C erhalten wir unter Berücksichtigung von (18) die Fehlerformel

$$\left.\begin{aligned} X_n' &= \left(X + \frac{c_r}{\varkappa h^2 A^{(r)}}\right) z_0^n - \frac{c_r}{\varkappa h^2 A^{(r)}} \\ \text{mit} \quad A^{(r)} &= \sum_{\varrho=0}^{r} |\bar{a}_{r\varrho}| \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (30).$$

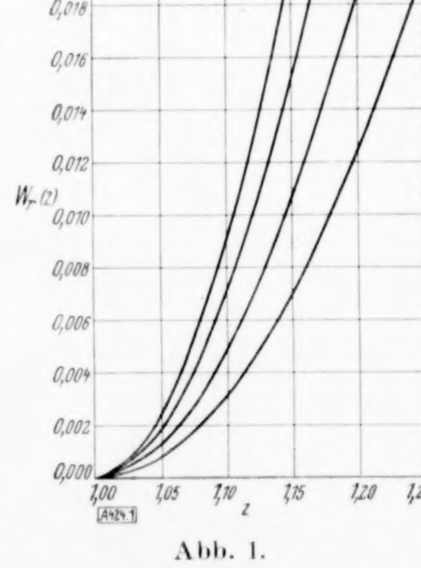


Abb. 1.

Für die $A^{(r)}$ hat man folgende Zahlenwerte:

$$A^{(1)} = 1, \quad A^{(2)} = \frac{4}{3}, \quad A^{(3)} = 2, \quad A^{(4)} = \frac{49}{15}.$$

Zur Berechnung der Wurzel z_0 ist die Gleichung

$$W_r(z) = \frac{z^{r+1} - 2z^r + z^{r-1}}{\sum\limits_{\varrho=0}^{r} |\bar{a}_{r\varrho}| z^{r-\varrho}} = \varkappa h^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

aufzulösen. Um bequem einen Näherungswert für z_0 zu finden, der nötigenfalls zu verbessern ist, sind in Abb. 1 die Kurven $W_r(z)$ für $r = 1, 2, 3, 4$ für das Intervall $z = 1{,}00 \ldots 1{,}25$ gezeichnet.

Auf eine gewisse Lücke in der Fehlerabschätzung muß noch hingewiesen werden. Die Berechnung des Quadraturfehlers c_r verlangt eine Abschätzung von $\frac{d^{r+1} f}{d t^{r+1}}$ auf der exakten Integralkurve. Diese $(r+1)$-te Ableitung läßt sich ausdrücken durch $f, f_x, f_t, f_{xx}, \ldots$ (abhängig von x und t) sowie durch x und $\dot{x}$ selbst. Höhere Ableitungen $\ddot{x}, \dddot{x}, \ldots$ treten wegen $\ddot{x} = f$ nicht auf. Für $x(t)$ kann man nach Durchführung der näherungsweisen Integration (etwa aus der Zeichnung) plausible Schranken annehmen, sodann die Fehlerabschätzung durchführen und nachsehen, ob die Schranken weit genug waren. Für $\dot{x}(t)$ kann man ebenfalls (aus der Zeichnung oder aus dem Differenzenschema) leicht plausible Schranken annehmen; aber man kann nachträglich nicht feststellen, ob die Schranken weit genug waren, da das Störmersche Verfahren keine Werte von $\dot{x}$ liefert.

Praktisch ist diese Lücke ohne Belang, da man bei genügend enger Intervalleinteilung dem Differenzenschema sehr sicher Schranken für x und $\dot{x}$ entnehmen kann, die man ziemlich roh vergrößern mag, ohne daß dies auf die Abschätzung von $|f^{(r+1)}|_{\max}$ wesentlichen Einfluß hat. Eine praktisch noch bequemere Abschätzung ist in dem in **5** durchgeführten Beispiel angewendet worden. Bei der Anwendung des Adamsschen Verfahrens auf die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x, t)$ tritt die geschilderte Schwierigkeit in der Fehlerabschätzung nicht auf.

4. Systeme von Differentialgleichungen. Die in **2** und **3** gegebenen Fehlerabschätzungen lassen sich ohne besondere Schwierigkeiten auf Systeme von Differentialgleichungen verallgemeinern. Im folgenden werden die Formeln für das System (2) von zwei Differentialgleichungen angegeben; wie sie für mehr als zwei Gleichungen lauten, ist daraus ohne weiteres zu erkennen. Die Beweisführung wird nur an den Stellen ausführlicher gegeben, wo grundsätzlich neue Überlegungen gegenüber dem Fall einer einzelnen Gleichung hinzukommen.

Gerechnet wird mit den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 x_{n+1} &= h^2 (\bar\beta_0 f_n + \bar\beta_1 \Delta f_n + \ldots + \bar\beta_r \Delta^r f_n) \\ \Delta^2 y_{n+1} &= h^2 (\bar\beta_0 g_n + \bar\beta_1 \Delta g_n + \ldots + \bar\beta_r \Delta^r g_n) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32),$$

wobei zur Abkürzung $f(x_\nu, y_\nu, t) = f_\nu$ und $g(x_\nu, y_\nu, t) = g_\nu$ gesetzt worden ist, nach dem am Ende von **1** gegebenen Schema.

Wir setzen die Gültigkeit der Lipschitzbedingungen

$$\left.\begin{aligned} |f(x, y, t) - f(x^*, y^*, t)| &\leq \varkappa_x |x - x^*| + \varkappa_y |y - y^*| \\ |g(x, y, t) - g(x^*, y^*, t)| &\leq \lambda_x |x - x^*| + \lambda_y |y - y^*| \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

für die rechten Seiten der Gl. (2) voraus. $\varkappa_x, \varkappa_y, \lambda_x, \lambda_y$ sind vier gegebene nichtnegative Konstanten. Abzuschätzen sind die Fehler

$$\varepsilon_{x\nu} = x_\nu - x(t_\nu), \qquad \varepsilon_{y\nu} = y_\nu - y(t_\nu) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

An die Stelle der Ungleichung (14) bzw. (19) treten die Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} |\Delta^2 \varepsilon_{x, n+1}| &\leq \sum_{\varrho=0}^{r} (A_{x\varrho} |\varepsilon_{x, n-\varrho}| + A_{y\varrho} |\varepsilon_{y, n-\varrho}|) + c_r \quad \text{mit } c_r = c_r' + c_r'' + c_r''' \\ |\Delta^2 \varepsilon_{y, n+1}| &\leq \sum_{\varrho=0}^{r} (B_{x\varrho} |\varepsilon_{x, n-\varrho}| + B_{y\varrho} |\varepsilon_{y, n-\varrho}|) + d_r \quad \text{mit } d_r = d_r' + d_r'' + d_r''' \\ & \qquad (n = r, r+1, r+2, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (35).$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$\varkappa_x h^2 |\bar\alpha_{r\varrho}| = A_{x\varrho}, \quad \varkappa_y h^2 |\bar\alpha_{r\varrho}| = A_{y\varrho}, \quad \lambda_x h^2 |\bar\alpha_{r\varrho}| = B_{x\varrho}, \quad \lambda_y h^2 |\bar\alpha_{r\varrho}| = B_{y\varrho} \quad . \quad (36).$$

Ferner sind $c_r', c_r'', c_r''', d_r', d_r'', d_r'''$ so definiert wie c_r', c_r'', c_r''' in **2** und **3**, nur daß an Stelle von $f(x, t)$ jetzt $f(x, y, t)$ und $g(x, y, t)$ tritt; und zwar gilt auch hier

$$c_r = \frac{h^{r+3}}{(r+1)!} |f^{(r+1)}|_{\max} \cdot I_r, \qquad d_r = \frac{h^{r+3}}{(r+1)!} |g^{(r+1)}|_{\max} \cdot I_r \quad \ldots\ldots \quad (37).$$

Gegeben sind obere Schranken $X_0, X_1, \ldots, X_r, Y_0, Y_1, \ldots, Y_r$ für die Fehler der ersten $r+1$ Punkte, so daß also

$$\left.\begin{aligned} &|\varepsilon_{x0}| \leqq X_0, \quad |\varepsilon_{x1}| \leqq X_1, \ldots, \quad |\varepsilon_{xr}| \leqq X_r, \\ &|\varepsilon_{y0}| \leqq Y_0, \quad |\varepsilon_{y1}| \leqq Y_1, \ldots, \quad |\varepsilon_{yr}| \leqq Y_r \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (38).$$

Die gesuchte Folge der Fehlerschranken $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, Y_{r+1}, Y_{r+2}, \ldots$ berechnet sich aus

$$\left.\begin{aligned} X_{r+1} &= 2\,X_r + X_{r-1} + \sum_{\varrho=0}^{r} A_{x\varrho}\, X_{r-\varrho} + \sum_{\varrho=0}^{r} A_{y\varrho}\, Y_{r-\varrho} + c_r \\ Y_{r+1} &= 2\,Y_r + Y_{r-1} + \sum_{\varrho=0}^{r} B_{x\varrho}\, X_{r-\varrho} + \sum_{\varrho=0}^{r} B_{y\varrho}\, Y_{r-\varrho} + d_r \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (39),$$

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1} &= 2\,X_n - X_{n-1} + \sum_{\varrho=0}^{r} A_{x\varrho}\, X_{n-\varrho} + \sum_{\varrho=0}^{r} A_{y\varrho}\, Y_{n-\varrho} + c_r \\ Y_{n+1} &= 2\,Y_n - Y_{n-1} + \sum_{\varrho=0}^{r} B_{x\varrho}\, X_{n-\varrho} + \sum_{\varrho=0}^{r} B_{y\varrho}\, Y_{n-\varrho} + d_r \\ & \qquad (n = r+1,\, r+2, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (40).$$

Um eine Abschätzung von $|\varepsilon_{xn}|$, $|\varepsilon_{yn}|$ unabhängig von der Kenntnis der Schranken der vorangehenden Fehler zu erhalten, berechnen wir zunächst aus Gl. (39) X_{r+1}, Y_{r+1} und sehen $X_1, X_2, \ldots, X_{r+1}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{r+1}$ als die gegebenen Anfangswerte an. Diese bestimmen mit den beiden Differenzengleichungen (40) eindeutig eine Lösung X_n. Wir werden auch hier wieder noch eine andere Lösung X_n', Y_n' der Differenzengleichung angeben, so daß stets $X_n' \geqq X_n$, $Y_n' \geqq Y_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ist. Ein Lösungssystem für das zu (40) gehörige homogene Gleichungssystem ist $C\,z_0^n$, $D\,z_0^n$, wobei z_0 eine Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \varkappa_x h^2 - W_r(z) & \varkappa_y h^2 \\ \lambda_x h^2 & \lambda_y h^2 - W_r(z) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (41)$$

ist. (Die Funktion $W_r(z)$ wurde in Gl. (31) definiert.) Setzt man nämlich $C\,z_0^n$ und $D\,z_0^n$ in das zu (40) gehörige homogene Gleichungssystem ein, so erhält man für C und D das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &\Big[-(z^{r+1} - 2\,z^r + z^{r-1}) + \sum_{\varrho=0}^{r} A_{x\varrho}\, z^{r-\varrho}\Big]\cdot C + \sum_{\varrho=0}^{r} A_{y\varrho}\, z^{r-\varrho}\cdot D = 0 \\ &\sum_{\varrho=0}^{r} B_{x\varrho}\, z^{r-\varrho}\cdot C + \Big[-(z^{r+1} - 2\,z^r + z^{r-1}) + \sum_{\varrho=0}^{r} B_{y\varrho}\, z^{r-\varrho}\Big]\cdot D = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (42).$$

Damit dieses System eine nichttriviale Lösung C, D zuläßt, muß notwendig seine Determinante verschwinden. Das gibt gerade Gl. (41) zur Berechnung von z_0. Statt ihrer betrachten wir zur genaueren Diskussion nacheinander die Gleichung für Λ

$$\begin{vmatrix} \varkappa_x h^2 - \Lambda & \varkappa_y h^2 \\ \lambda_x h^2 & \lambda_y h^2 - \Lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (43)$$

und die Gleichung für z

$$W_r(z) = \Lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (44).$$

Hat man nicht ein System von zwei, sondern von m Differentialgleichungen, dann tritt in der „Säkulargleichung" (43) eine analog gebaute m-reihige Determinante auf. Zu jedem die Gl. (41) befriedigenden z-Wert können dann aus Gl. (42) die zugehörigen Werte von C und D bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt werden. Für die majorante Lösung X_n', Y_n' kommt — ebenso wie im Fall einer einzelnen Differentialgleichung — nur eine solche Wurzel z_0 in Frage, die reell und > 1 ist. Eine solche existiert aber immer.

Nach einem Satz von G. Frobenius hat nämlich eine Matrix mit nichtnegativen Elementen, wie es die Matrix der mit h^2 multiplizierten Lipschitzkonstanten ist, mindestens eine charakteristische Wurzel, die reell und positiv ist[9]). Im Falle $m=2$ läßt sich der Beweis dafür auch unmittelbar führen. Setzen wir nämlich

$$\varkappa_x + \lambda_y = 2p, \qquad \varkappa_x \lambda_y - \varkappa_y \lambda_x = \Delta,$$

so folgt für die beiden Wurzeln Λ_1, Λ_2 von Gl. (43)

$$\Lambda_{1,2} = h^2 (p \pm \sqrt{p^2 - \Delta}).$$

Da $p^2 > \Delta$, so ist Λ_1 sicher reell und positiv.

Die Gleichung $W_r(z) = \Lambda$ hat ferner für $\Lambda > 0$ immer genau eine reelle Wurzel, die >1 ist. Analog zu Gl. (28) setzen wir also

$$X_n' = C z_0^n - \frac{\lambda_y c_r - \varkappa_y d_r}{h^2 A^{(r)} \Delta}, \qquad Y_n' = D z_0^n + \frac{\lambda_x c_r - \varkappa_x d_r}{h^2 A^{(r)} \Delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (45).$$

Die (von n unabhängigen) Konstanten auf den rechten Seiten der Gl. (45) sind partikuläre Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems (40). X_n' und Y_n' befriedigen also dieses System (40). Der obige Ansatz für X_n' und Y_n' ist ersichtlich nur statthaft, wenn $\Delta \neq 0$ ist, was durch Vergrößerung einer Lipschitzkonstanten stets erreicht werden kann. $A^{(r)}$ ist in (30) definiert. Daß es nur einen brauchbaren Wert von z_0 gibt, wird im folgenden gezeigt.

Die Lösung (45) von (40) ist nur dann als majorante Lösung brauchbar, wenn C und D einerlei Vorzeichen haben, so daß C und D als positiv gewählt werden können. Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf den Fall, daß die Matrix $\mathfrak{K}$ der Lipschitzkonstanten keine verschwindenden, sondern nur positive Elemente hat. In diesem Fall lautet der bereits erwähnte Satz von Frobenius:

Sind die Elemente einer Matrix alle reell und positiv, so hat ihre charakteristische Gleichung eine Wurzel, die reell, positiv, einfach und absolut größer ist als jede andere Wurzel (sog. „Maximalwurzel" der Matrix).

Frobenius zeigte ferner: Ist Λ^* die Maximalwurzel einer Matrix $\mathfrak{M}$ mit positiven, reellen Elementen, dann hat das homogene lineare Gleichungssystem mit der Matrix $\mathfrak{M} - \Lambda^* \mathfrak{E}$ nur eine (bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmte) Lösung, deren Elemente alle als positiv angenommen werden können. Das homogene lineare Gleichungssystem mit der Matrix $\mathfrak{M} - \Lambda \mathfrak{E}$ kann ferner nur dann eine Lösung haben, deren Elemente alle nichtnegativ und nicht alle Null sind, wenn $\Lambda = \Lambda^*$ ist; dann sind aber alle Elemente der Lösung positiv[10]).

Bezeichne jetzt Λ^* die Maximalwurzel für die Matrix $h^2 \mathfrak{K}$ und z^* den z-Wert, der sich aus $W_r(z) = \Lambda^*$ eindeutig ergibt. Dann ist, wie bereits gezeigt, z^* reell und >1, also als z_0 in Gl. (45) brauchbar. C und D (oder im Fall von m Gleichungen, m Konstanten $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots, C^{(m)}$) bestimmen sich bis auf einen gemeinsamen Faktor aus dem homogenen Gleichungssystem (42) mit $z = z^*$, das die Matrix

$$h^2 \mathfrak{K} - W_r(z^*) \mathfrak{E} = h^2 \mathfrak{K} - \Lambda^* \mathfrak{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

besitzt, und können nach dem vorstehenden Satze sämtlich positiv gewählt werden. Eine andere Wahl von z_0 ist nicht möglich; selbst wenn Gl. (41) noch eine andere Wurzel hätte, die ebenfalls reell und >1 ist, so wäre diese für den Ansatz (45) unbrauchbar, da dann C und D nach dem oben angeführten Satze sicher nicht einerlei Vorzeichen haben. z_0 ist also immer eindeutig bestimmt, wie groß auch m, die Anzahl der Differentialgleichungen des Systems sei. Die praktische Berechnung von Λ aus Gl. (43) ist auch insofern wesentlich erleichtert, als man nur die Wurzel vom größten Absolutbetrag zu berechnen hat.

Der in C und D noch unbestimmte gemeinsame Faktor ist erstens so zu wählen, daß C und D beide positiv sind und so groß ausfallen, daß

$$\left.\begin{array}{l} X_1' \geqq X_1, \quad X_2' \geqq X_2, \quad \ldots, \quad X_r' \geqq X_r, \quad X'_{r+1} \geqq X_{r+1}, \quad X'_{r+1} - X_{r+1} \geqq X_r' - X_r \\ Y_1' \geqq Y_1, \quad Y_2' \geqq Y_2, \quad \ldots, \quad Y_r' \geqq Y_r, \quad Y'_{r+1} \geqq Y_{r+1}, \quad Y'_{r+1} - Y_{r+1} \geqq Y_r' - Y_r \end{array}\right\} \quad (47)$$

(vgl. (27)) gilt, was stets möglich ist.

[9]) G. Frobenius: Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Kl. 1908, S. 471 bis 476; 1909, S. 514 bis 518; 1912, S. 456 bis 477.

[10]) Siehe die dritte der unter [9]) angeführten Arbeiten S. 464 bis 465. — $\mathfrak{E}$ ist die Einheitsmatrix.

Ist $\Delta = 0$, dann sind Polynome in n eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems (40). Liegt Δ nahe bei Null, dann werden die zweiten Summanden auf den rechten Seiten von (45) sehr groß und überwiegen für die in Frage kommenden Werte von n stark gegenüber den ersten. Es empfiehlt sich daher, in einem solchen Fall eine Lipschitzkonstante so zu vergrößern, daß $\Delta = 0$ wird.

5. Beispiel. Als Beispiel betrachten wir das System

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= a\, e^{2x} - e^{-x} + e^{-2x}\cos^2 y = f(x, y) \\ \ddot{y} &= -\frac{\sin y}{\cos^3 y} + e^{-2x}\sin y \cos y = g(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

mit

$$a = \frac{1}{16\,\gamma_1^{\,4}}, \quad \gamma_1 = -\gamma = 0{,}97, \quad a = 0{,}070\,600$$

unter den Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{,}621\,851, & \dot{x} &= 0 \\ y &= 0 \quad , & \dot{y} &= 0{,}174\,496 \end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0 \qquad (49).$$

Die Integralkurven $x(t)$, $y(t)$ sind von C. Störmer für $t = 0 \ldots \frac{76}{8}$ mit $h = \frac{1}{8}$ berechnet worden. Abb. 2 und 3 geben den Verlauf wieder[11]).

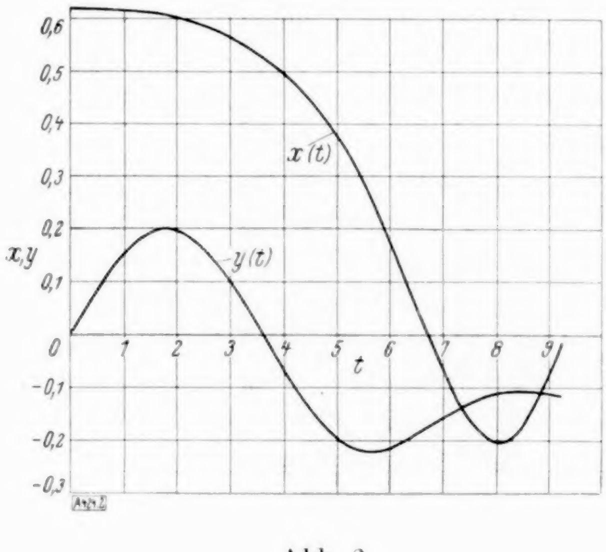


Abb. 2

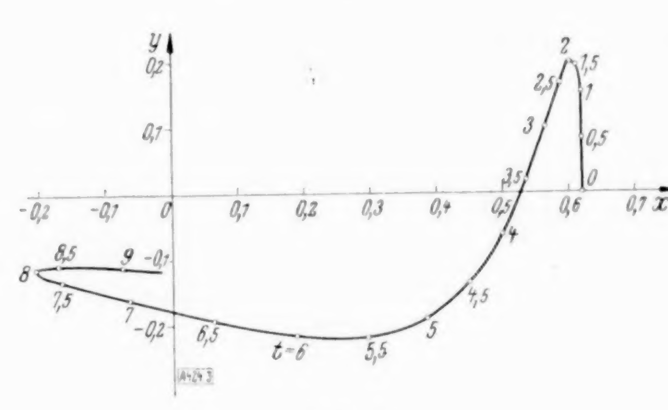


Abb. 3.

Für die Fehlerabschätzung ist es im allgemeinen erforderlich, daß die eigentliche Rechnung bereits völlig durchgeführt sei. Obwohl Störmer mit dem Näherungsgrad $r = 4$ rechnete, wird der Fehlerabschätzung $r = 3$ zugrunde gelegt, da die vierten Differenzen schon sehr stark mit Abrundungsfehlern behaftet sind und die Zahlenwerte kaum beeinflussen. Wir beschränken uns auf das Intervall $0 \leq t \leq 3$ der unabhängigen Veränderlichen, also auf 24 Schritte. Aus den Zahlen der durchgeführten Rechnung kann man vermuten, daß

$$0{,}55 < x(t) < 0{,}63, \quad 0 \leq y(t) < 0{,}22 \qquad (50)$$

eine rohe Eingrenzung von x und y ist (vgl. Abb. 2). Die folgende feinere Fehlerabschätzung zeigt, daß diese Schranken nicht zu eng sind. Für $\varkappa_x, \varkappa_y, \lambda_x, \lambda_y$ nehmen wir obere Schranken von

$$|f_x(x, y)|_{\max}, \quad |f_y(x, y)|_{\max}, \quad |g_x(x, y)|_{\max}, \quad |g_y(x, y)|_{\max}$$

für den Bereich (50). Es ist hier übrigens $f_y = g_x$, also $\varkappa_y = \lambda_x$. Als Zahlenwerte ergeben sich

$$\varkappa_x = 0{,}4901, \quad \varkappa_y = 0{,}1418, \quad \lambda_x = 0{,}1418, \quad \lambda_y = 0{,}9509.$$

[11]) Die Kurve $y(x)$ ist auch abgebildet bei C. Störmer: Ztschr. f. Astrophys., Bd. 1, 1930, S. 237 bis 274, und zwar ist es in Abb. 9 (S. 248) die dritte Kurve von rechts und in Abb. 13 (S. 253) die zweite Kurve von rechts. Die Bezeichnungen der Konstanten a, γ, γ_1 entsprechen denen bei Störmer.

Um $\left|\frac{d^4 f}{d t^4}\right|_{\max}$ und $\left|\frac{d^4 g}{d t^4}\right|_{\max}$ abzuschätzen, gehen wir, da f und g durch verhältnismäßig komplizierte Ausdrücke gegeben sind, hier nicht so vor, wie am Schluß von **3** angedeutet wurde. Wir beachten vielmehr, daß

$$\frac{d^4 f}{d t^4} \approx \frac{\Delta^4 f}{\Delta t^4} = \frac{\Delta^4 \xi}{h^6}, \qquad \frac{d^4 g}{d t^4} \approx \frac{\Delta^4 \eta}{\Delta t^4} = \frac{\Delta^4 \eta}{h^6}$$

ist ($\xi = h^2 f$, $\eta = h^2 g$) und wählen eine obere Schranke aller $\Delta^4 \xi$ und $\Delta^4 \eta$, die im Differenzenschema der Rechnung stehen. Dort findet man, daß

$$|\Delta^4 \xi|_{\max} < 6 \cdot 10^{-6}, \quad |\Delta^4 \eta|_{\max} < 6 \cdot 10^{-6}.$$

Daher wollen wir annehmen

$$\left|\frac{d^4 f}{d t^4}\right|_{\max} < 8^6 \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 1{,}573, \qquad \left|\frac{d^4 g}{d t^4}\right|_{\max} < 1{,}573.$$

Da wir nur den reinen „Formelfehler" untersuchen und deshalb von allen Abrundungsfehlern absehen wollen, setzen wir die Anfangswerte $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$ als fehlerlos voraus, setzen also

$$X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = Y_0 = Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0.$$

Aus Gl. (39) folgt dann $X_4 = c_r$, $Y_4 = d_r$. Und zwar ergibt sich aus Gl. (37)

$$c_r = d_r = 0{,}7917 \cdot 10^{-6}.$$

Die schrittweise Berechnung der X_ν, Y_ν nach den Gl. (40) ergibt schließlich folgende Zahlenwerte:

ν	$X_\nu \cdot 10^6$	$Y_\nu \cdot 10^6$	ν	$X_\nu \cdot 10^6$	$Y_\nu \cdot 10^6$
5	2,384	2,391	15	75,83	86,90
6	4,799	4,835	16	91,79	107,6
7	8,073	8,189	17	110,2	132,2
8	12,26	12,55	18	131,5	161,5
9	17,43	18,03	19	156,0	196,4
10	23,68	24,81	20	184,2	237,8
11	31,12	33,08	21	216,6	287,1
12	39,87	43,10	22	254,0	345,7
13	50,11	55,15	23	297,2	415,3
14	62,02	69,61	24	346,8	497,9

Um die Fehlerabschätzung auch nach der Methode der majoranten Partikularlösung durchzuführen, berechnen wir aus Gl. (43) und (44) die Wurzeln Λ und z und finden

$$\Lambda_1 = 0{,}015\,484 \qquad z_1 = 1{,}182$$
$$\Lambda_2 = 0{,}007\,031 \qquad z_2 = 1{,}120.$$

Wir wissen bereits, daß nur die Maximalwurzel z_1 brauchbar ist und setzen daher $z_0 = 1{,}182$. In der Tat liefert Gl. (42) für z_1 das Verhältnis $C : D = +0{,}2831$, für z_2 aber ein negatives Verhältnis. Die Determinante der Lipschitzkonstanten ist $\Delta = 0{,}4459$. Aus den Gl. (45) wird

$$\left.\begin{array}{ll} X_n' = C z_0^n - 45{,}97 \cdot 10^{-6} & \text{mit} \quad z_0 = 1{,}182 \\ Y_n' = D z_0^n - 19{,}79 \cdot 10^{-6} & \text{und} \quad C : D = 0{,}2831 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (51).$$

Die Bedingungen (47) sind erfüllt, wenn man

$$C = 45{,}97 \cdot 10^{-6}, \quad D = 162{,}4 \cdot 10^{-6}$$

setzt. Für $n = 24$ erhält man $X_{24}' \approx 2500 \cdot 10^{-6}$, also einen mehr als 7 mal so großen Wert wie bei der rekursiven Fehlerabschätzung, so daß man hier auf die Benutzung der Formel (45) besser verzichten wird. Bei kleineren Werten von z_0 können aber beide Verfahren durchaus konkurrieren.

Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt.

Von *Artur Erdélyi* in Brünn.

Einleitung. Der Stabilisierung instabiler Schwingungsvorgänge durch Überlagerung kleiner, aber sehr rascher Schwingungen kommt in der Technik eine stets wachsende Bedeutung zu. Es ist bereits darauf hingewiesen worden, daß das einfachste mechanische Modell eines solcherweise stabilisierten Systems als ein Pendel gedacht werden kann, dessen Aufhängepunkt in kleine, aber rasche Schwingungen versetzt wird. So dürfte die Behandlung dieses Problems mehr Interesse verdienen, als es auf den ersten Blick der Fall zu sein scheint.

Die umfangreichste Behandlung dieses Problems rührt von Paul Hirsch[1]) her, der sich in der unten zitierten Arbeit mit den Gleichgewichtslagen solcher Pendel beschäftigt hat. Leider geht aus der ganzen Art seines Näherungsverfahrens der Gültigkeitsbereich seiner Resultate nicht klar hervor.

Hirsch behandelt das Problem statisch, indem er den „Effekt" der Oszillation, d. h. den Mittelwert der Beschleunigungen des Pendels während einer Schwingungsdauer des Aufhängepunktes berechnet. Die Gleichgewichtslagen sind dadurch bestimmt, daß für sie die mittlere Beschleunigung die Erdbeschleunigung gerade aufhebt. Ohne Kenntnis der wirklichen Bewegung des Pendels aber kann man diese Berechnung nur unter vielen und zum Teil unkontrollierbaren Vernachlässigungen durchführen. Die Existenz kleiner Schwingungen ist die grundlegende Voraussetzung hierfür; es kann aber nicht gezeigt werden, daß solche Schwingungen wirklich möglich sind. Auch die Voraussetzung, daß der Schwerpunkt des Pendels bei der Oszillation seine Mittellage unter einer solchen Richtung passiere, daß in diesem Augenblick die vom Antriebsmechanismus ausgeübte Kraft verschwinde, ist nicht ohne weiteres einleuchtend. Ebensowenig erscheint es uns zwingend, daß die Bewegung des Schwerpunktes in erster Näherung geradlinig erfolgt. Dazu kommt noch, daß die Gleichgewichtslage bei dieser statischen Behandlung gar nicht definiert werden kann, wie Ph. Bock gezeigt hat[2]). Freilich geht aus der von Ph. Bock gegebenen Darstellung des Problems und der gegenwärtigen Arbeit hervor, daß die von Hirsch erzielten Resultate für sehr rasche und sehr kleine Schwingungen des Aufhängepunktes gültig sind. Trotz dieser Unsicherheit ist es allerdings ein Vorteil der von Hirsch angewendeten Methode, daß man mit ihrer Hilfe ziemlich allgemeine Schwingungsformen des Aufhängepunktes untersuchen kann.

Professor Weyrich hat im mathematischen Seminar der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn bei der Behandlung der Mathieuschen Funktionen und verwandter Transzendenten darauf aufmerksam gemacht, daß im Falle einer linearen, harmonischen Oszillation des Aufhängepunktes in der Schwererichtung die Differentialgleichung der Pendelbewegung für kleine Schwingungen eine inhomogene Mathieusche Differentialgleichung ist. Im Anschluß daran hat Ph. Bock (Dissertation, Prag 1932) nachgewiesen, daß die Hirschschen Resultate das erste Glied einer asymptotischen Reihe sind, so daß man das Gebiet ihrer Gültigkeit und auch die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit klarer beurteilen konnte.

In der vorliegenden Arbeit wird, ausgehend von der Differentialgleichung der Bewegung, die Theorie in zwei Richtungen weitergeführt.

Es gelingt unter Annahme einer beliebigen (periodischen) Bewegung des Aufhängepunktes in der Schwererichtung die Existenz kleiner Schwingungen um eine Gleichgewichtslage sicherzustellen. Für eine spezielle Bewegung des Aufhängepunktes (Annäherung der Sinuskurve im Weg-Zeit-Diagramm durch sich in den Nullstellen der Sinuskurve berührende Parabelbogen)[3]), die die harmonische Bewegung hinreichend gut annähert, kann man die Differentialgleichung mittels elementarer Funktionen integrieren und die Gleichgewichtslagen numerisch bestimmen. Es zeigt sich, daß es eine kritische Frequenz der Oszillationen des Aufhängepunktes gibt, unterhalb welcher sich die Stabilisierungserscheinungen überhaupt nicht zeigen. Für alle Frequenzen oberhalb der kritischen gibt es zwei in bezug auf die Schwererichtung symmetrisch gelegene Gleichgewichtslagen. Die Gleichgewichtslagen werden definiert als der Mittelwert der Pendelstellungen. Ist Θ der Winkel, den die Pendelstange[4]) mit der negativen Schwererichtung einschließt, so ist die Gleichgewichtslage gegeben durch:

$$a = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Theta \, dt .$$

[1]) Paul Hirsch: Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 10 (1930), S. 41—52.

[2]) Dissertation. Prag 1932.

[3]) Die Anregung hierzu verdanke ich Herrn Professor Weyrich.

[4]) Als Pendelstange bezeichnen wir die Verbindungslinie des Pendelschwerpunktes mit dem Aufhängepunkt.

Durch diese Festsetzung wird die Gleichgewichtslage erst definiert. Aus der aufzustellenden Differentialgleichung folgt dann unter Heranziehung der Existenzsätze die Möglichkeit kleiner Schwingungen um solche Gleichgewichtslagen. Es ist beabsichtigt, in einer zweiten Mitteilung die Gleichgewichtslagen für allgemeinere Schwingungen des Aufhängepunktes zu ermitteln und auch die Schwingungen zu behandeln, die nicht als kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage beschrieben werden können.

Als ganz neuer Gesichtspunkt wurde in der vorliegenden Arbeit die Dämpfung des Systems in Rechnung gezogen, die bei den vorgenannten Autoren vernachlässigt wurde. (Beim mechanischen Modell des Pendels macht sich diese Dämpfung als Luftreibung und Reibung des Pendelgelenks bemerkbar.) Es zeigt sich zwar, daß die Dämpfung, solange sie klein ist, die numerischen Resultate nicht wesentlich beeinflußt, wie das nicht anders zu erwarten ist; abgesehen aber davon, daß sie den Schwingungsvorgang wesentlich beeinflußt, wenn sie nur einigermaßen groß ist, ist ihre Einführung deshalb von Wichtigkeit, weil sie die ganze Theorie von einer gewissen Willkürlichkeit und Unbestimmtheit befreit, die ihr sonst anhaften würde, da durch sie einwandfrei entschieden werden kann, welche partikulären Integrale der Differentialgleichung für die Herstellung der Lösung heranzuziehen sind, was bei Vernachlässigung der Reibung von vornherein nicht ohne weiteres möglich ist.

I. Allgemeiner Teil.

Problemstellung. Es sollen die kleinen Schwingungen eines (physischen) Pendels um eine Mittellage behandelt werden, wenn der Aufhängepunkt desselben eine vertikale Schwingung mit der Amplitude A und der Schwingungszahl n (Schwingungszeit $T = \frac{1}{n}$) ausführt. Die Entfernung des Pendelschwerpunktes vom Aufhängepunkt sei s, sein Trägheitsradius in bezug auf den Aufhängepunkt k und die reduzierte Pendellänge l (siehe Abb. 1). Hat man ein mathematisches Pendel, so bedeutet $l = s = k$ die wirkliche Länge des Pendels[5]).

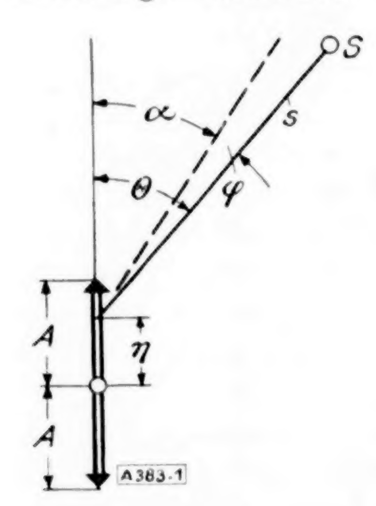


Abb. 1.

Die Differentialgleichung der Bewegung. Wir stellen die Lagrangesche Gleichung für die Bewegung des Pendels auf. η sei die Elongation des Aufhängepunktes, Θ der von der Pendelstange und der negativen Schwererichtung eingeschlossene Winkel (siehe Abb. 1), M die Masse des Pendels, $k^2 M$ sein Trägheitsmoment in bezug auf die Schwingungsachse. Wie üblich, ist $\frac{d\Theta}{dt} = \dot{\Theta}$, $\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \ddot{\Theta}$ usw. gesetzt.

Das Pendel führt eine Translation in der negativen Schwererichtung mit der Geschwindigkeit $\dot{\eta}$ und eine Rotation um den Aufhängepunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ aus. Seine kinetische Energie ist[6]):

$$L = \frac{1}{2}\{M\dot{\eta}^2 + 2M\dot{\eta}\dot{\Theta}s\sin\Theta + Mk^2\cdot\dot{\Theta}^2\} = \frac{1}{2}M\{\dot{\eta}^2 + 2\dot{\eta}\,s\,\dot{\Theta}\sin\Theta + k^2\dot{\Theta}^2\}.$$

Die potentielle Energie des Pendels ist:

$$U = Mg\{\eta + s\cos\Theta\}.$$

Wenn man L und U in die Lagrangesche Differentialgleichung

$$\frac{\partial(L-U)}{\partial\Theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\Theta}}\right) = 0$$

einsetzt, bekommt man:

$$k^2\ddot{\Theta} - s(g - \ddot{\eta})\cdot\sin\Theta = 0.$$

[5]) Um den Vergleich mit den Hirschschen Resultaten zu ermöglichen, sei hier die Zusammenstellung der Bezeichnungen gegeben:

In der vorliegenden Arbeit:	s,	k^2,	l,	A,	n.
In der Arbeit von Hirsch:	c,	$c^2 + k^2$,	...,	a,	n.

[6]) Das erste Glied in der Klammer rührt von der Translation, das dritte von der Rotation her, das zweite Glied ist bedingt durch die Coriolisbeschleunigung.

Bedenkt man, daß die reduzierte Pendellänge $l = \frac{k^2}{s}$ ist, so hat man:

$$\ddot{\Theta} - \frac{g - \ddot{\eta}}{l} \cdot \sin \Theta = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Zieht man noch die Reibung in Betracht[7]), so wird die Gleichung lauten:

$$\ddot{\Theta} + 2 \varkappa n \dot{\Theta} - \frac{g - \ddot{\eta}}{l} \cdot \sin \Theta = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wo $\varkappa$ eine (dimensionslose) positive Konstante ist.

Wir nehmen zunächst heuristisch an, daß kleine Schwingungen um eine von der Zeit unabhängige „Gleichgewichtslage“ (im Sinne der in der Einleitung gegebenen Definition) möglich sind und führen diesen Ansatz analytisch durch, um dann zu zeigen, daß die zunächst hypothetisch angenommenen Schwingungen wirklich existieren. Wir zerlegen also den Winkel

$$\Theta = \alpha + \varphi ,$$

wo

$$\alpha = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Theta \, d t ,$$

also

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi \, d t = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und

$$\varphi \ll \frac{\pi}{2} ,$$

dann ist $\cos \varphi \doteq 1$, $\sin \varphi \doteq \varphi$, $\sin (\alpha + \varphi) \doteq \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \varphi$. Gl. (2) geht dann über in

$$\ddot{\varphi} + 2 \varkappa n \dot{\varphi} - \frac{g - \ddot{\eta}}{l} \cdot \cos \alpha \cdot \varphi = \frac{g - \ddot{\eta}}{l} \cdot \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

eine inhomogene Gleichung, die aber dafür linear ist. Von den Koeffizienten dieser Differentialgleichung sind alle bis auf $\ddot{\eta}$ konstant, dieses aber ist periodisch mit der Zeit veränderlich.

Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$\ddot{\psi} + 2 \varkappa n \dot{\psi} - \frac{g - \ddot{\eta}}{l} \cdot \cos \alpha \cdot \psi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

und führen sie durch die Substitution

$$\psi (t) = e^{- \varkappa n t} \chi (t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

in die selbstadjungierte Form

$$\ddot{\chi} (t) - \left(\frac{g - \ddot{\eta}}{l} \cdot \cos \alpha + \varkappa^2 n^2 \right) \chi (t) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

über, eine Differentialgleichung vom Hillschen Typus[8]).

Ist $\chi (t)$ die allgemeine Lösung von (7), so ist $\psi (t) = e^{- \varkappa n t} \cdot \chi (t)$ die entsprechende Lösung von (5). Da (4) das partikuläre Integral $- \operatorname{tg} \alpha$ besitzt[9]), so ist ihre allgemeine Lösung

$$\varphi (t) = e^{- \varkappa n t} \chi (t) - \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

[7]) Wir setzen die Reibung der Winkelgeschwindigkeit proportional.

[8]) Bezüglich der Theorie der Hillschen Differentialgleichungen sei verwiesen auf die Monographie von M. J. O. Strutt: Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. I. Band, Heft 3 der Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin 1932, Springer. Da sind neben einer kurzen Zusammenstellung der Ergebnisse auch reiche Literaturangaben über die Theorie und Anwendungen dieser Differentialgleichungen zu finden.

[9]) Dieses partikuläre Integral hat keine unmittelbare physikalische Bedeutung. Man kann nicht etwa diese Zerlegung auffassen als eine in erzwungene und freie Schwingungen, wie diese Begriffe hier überhaupt keine Bedeutung haben.

Lösung der Differentialgleichung. Aus der allgemeinen Theorie der Hillschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d t^2} + \Phi(2 \pi n t) \cdot u = 0,$$

wo Φ eine gerade periodische Funktion ist ($\Phi(x + 2\pi) = \Phi(x)$), benützen wir folgende Sätze (siehe z. B. bei Strutt a. a. O. S. 13ff.):

1. Das Theorem von Floquet[10]): Die Hillsche Differentialgleichung besitzt zwei (im Falle $\mu \neq 0$ linear unabhängige) Lösungen von der Form:

$$u_1(t) = e^{\mu n t} F(2 \pi n t) \qquad u_2(t) = e^{-\mu n t} F(-2 \pi n t),$$

wobei $F(2 \pi n t)$ eine modulo $T = \frac{1}{n}$ periodische Funktion von t ist.

2. Zur Berechnung von μ hat man eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{Cof}\, \mu = f(\cos \alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

wo f eine reelle Funktion ihres Argumentes ist. (Im allgemeinen hängt die rechte Seite von allen verfügbaren Parametern der Differentialgleichung ab, die in Φ enthalten sind; in unserem Falle ist nur $\cos \alpha$ verfügbar, alle anderen sind durch die Daten des schwingenden Systems gegeben.) Zunächst ist $\mu = \mathfrak{ArCof}\,[f(\cos \alpha)]$ unendlich vieldeutig. Da indessen die Wurzeln dieser Gleichung sich nur um ganzzahlige Vielfache von $2 \pi i$ unterscheiden, so daß also der diesen Summanden entsprechende Teil des exponentiellen Faktors in den Lösungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ periodisch modulo T in t ist und daher zu der periodischen Funktion $F(2 \pi n t)$ geschlagen werden kann, genügt es, aus den unendlich vielen Wurzeln der Gl. (9) einen Wert als Hauptwert herauszugreifen. Als solchen wählen wir denjenigen Wert, für den

$$\Re \mathfrak{e}\, \mu \geqq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \Im \mathfrak{m}\, \mu < 2\pi \text{ [11])}.$$

3. Die Sätze von O. Haupt[12]) besagen in unserem Falle, daß für jedes vorgegebene reelle μ die Gl. (9) abzählbar unendlich viele reelle Wurzeln

$$\cos \alpha_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

hat, und daß die zu $\cos \alpha_{2\nu-1}$ und $\cos \alpha_{2\nu}$ gehörenden Lösungen der Differentialgleichung genau ν Nullstellen in dem Intervall $(0, T)$ haben. Die Gleichung

$$-\mathfrak{Cof}\, \mu = f(\cos \alpha)$$

hat ebenfalls abzählbar unendlich viele Wurzeln

$$\cos \bar{\alpha}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

und es haben wieder die zu $\cos \bar{\alpha}_{2\nu-1}$ und $\cos \bar{\alpha}_{2\nu}$ gehörenden Lösungen der Differentialgleichung ν Nullstellen in dem Intervall $(0, T)$.

Unsere Aufgabe ist es, solche Lösungen $\chi(t)$ der Differentialgleichung (7) zu finden, daß (8) eine für alle Zeiten kleine Funktion mit dem Mittelwert 0 ergibt. Wir müssen dabei zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $\operatorname{tg} \alpha = 0$ oder $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ ist. Wir führen hier den Existenzbeweis zunächst für den allgemeinen Fall $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ und werden dann die Diskussion des Falles $\operatorname{tg} \alpha = 0$ nachtragen. Für $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ zeigen wir zunächst, daß obige Aufgabe identisch ist mit der Bestimmung solcher von Nullstellen freier Lösungen der Differentialgleichung (7), für die $\mu = \varkappa$ ist.

Zunächst muß die Lösung $\chi(t)$ frei von Nullstellen sein. Hätte nämlich $\chi(t)$ eine Nullstelle t_0, so wäre an dieser Stelle $\varphi(t_0) = -\operatorname{tg} \alpha$, also gewiß nicht sehr klein. (Den Fall $\operatorname{tg} \alpha = 0$ haben wir ausgeschlossen.)

Jetzt zeigen wir, daß wir nur Lösungen brauchen können, für die $\mu = \varkappa$ ist. Aus dem Floquetschen Theorem folgt, daß χ sich linear zusammensetzt aus

$$\chi_1(t) = e^{\mu n t} F(2 \pi n t) \quad \text{und} \quad \chi_2(t) = e^{-\mu n t} F(-2 \pi n t) \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Wir müssen durch die Wahl von $\cos \alpha$ erreichen können, daß (8) die oben angegebenen Eigenschaften besitzt.

[10]) Floquet: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, Paris, Thèse, 1879, Ann. Ecole norm. 12 (1883), S. 47—88.

[11]) Unter $\Re\mathfrak{e}$ und $\Im\mathfrak{m}$ seien der reelle und imaginäre Teil einer komplexen Größe verstanden.

[12]) O. Haupt: Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, Math. Annalen Bd. 79 (1919), S. 278 bis 285.

Aus (6) hat man dann

$$\psi_1(t) = e^{(-\varkappa+\mu)nt} F(2\pi n t) \quad \text{und} \quad \psi_2(t) = e^{(-\varkappa-\mu)nt} F(-2\pi n t) \quad . \; . \; . \; (11).$$

Wählt man $\cos\alpha$ so, daß $\Re\mathfrak{e}\,\mu > \varkappa$, so ist $\psi_1(t)$ instabil, d. h. ihr absoluter Betrag wächst mit zunehmendem t über alle Grenzen, und $\psi_2(t)$ gedämpft. (In diesem Falle ist nämlich $\Re\mathfrak{e}(-\varkappa+\mu) > 0$ und $\Re\mathfrak{e}(-\varkappa-\mu) < 0$.) Dieser Fall, wo nach (8) auch $\varphi(t)$ über alle Grenzen wachsen oder gegen $-\operatorname{tg}\alpha$ gehen muß, kann gewiß keine kleinen Schwingungen liefern.

Wählt man aber $\cos\alpha$ so, daß $\Re\mathfrak{e}\,\mu < \varkappa$, so ist $\Re\mathfrak{e}(-\varkappa+\mu) < 0$ und erst recht $\Re\mathfrak{e}(-\varkappa-\mu) < 0$. (11) zeigt dann, daß beide Lösungen der homogenen Gleichung abklingen und daß die Lösung von (4) sich nach hinreichend langer Zeit auf $-\operatorname{tg}\alpha$ reduziert. Da wir den Fall $\operatorname{tg}\alpha = 0$ einer späteren Diskussion vorbehalten haben, so können wir wieder sagen, daß auch $\Re\mathfrak{e}\,\mu < \varkappa$ keine kleinen Schwingungen mit dem Mittelwert 0 liefert, wie sie (3) verlangt.

Erst wenn $\cos\alpha$ so gewählt wird, daß $\Re\mathfrak{e}\,\mu = \varkappa$, hat man eine stabile, nicht abklingende Lösung, von der wir sogleich zeigen werden, daß sie sogar periodisch ist, und eine zweite, die allerdings abklingt, mit der Dämpfung $2\varkappa$.

Da $\mathfrak{Cof}\,\mu = f(\cos\alpha)$ reell ist, wie wir schon früher betont haben, muß $\mathfrak{Im}\,\mu = \varrho\pi$ sein, μ selbst muß dann die Form haben

$$\mu = \varkappa + \varrho\pi i \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12).$$

Nach der Definition des Hauptteiles von μ können wir uns auf die Werte $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$ beschränken. Wir werden sogleich zeigen, daß auch $\varrho = 1$ auszuschließen ist.

Aus den oben zitierten Sätzen von Haupt folgt nämlich, daß zur kleinsten Wurzel der Gl. (9) eine nullstellenfreie Lösung $\chi_1(t)$ gehört. Für diese Lösung ist

$$\psi_1(t) = F(2\pi n t)$$

also, wie wir behaupteten, eine periodische Funktion mit der Periode T. Zu allen anderen Wurzeln der Gl. (9) gehören Lösungen der Differentialgleichung, die Nullstellen haben, also für unsere Zwecke nicht brauchbar sind.

Die andere Möglichkeit

$$\mu = \varkappa + i\pi$$

scheidet aus, weil nach den oben angeführten Sätzen von Haupt zu den Wurzeln der Gleichung

$$\mathfrak{Cof}(\varkappa + i\pi) = -\mathfrak{Cof}\,\varkappa = f(\cos\alpha)$$

Lösungen der Differentialgleichung gehören, die alle Nullstellen haben.

Wir haben also gesehen, daß die Gleichung

$$\mathfrak{Cof}\,\varkappa = f(\cos\alpha)$$

immer eine kleinste reelle (nicht negative) Wurzel $\cos\alpha$ besitzt, und daß für diesen Wert von $\cos\alpha$ immer eine nullstellenfreie periodische Lösung von (5) existiert, die wir etwa mit $\psi_1(t)$ bezeichnen wollen. Von ihr zeigen wir, daß (8) tatsächlich eine Funktion mit dem Mittelwert 0 ergibt, also eine kleine Schwingung um eine stabile Gleichgewichtslage darstellt.

Da $\psi_1(t+T) = \psi_1(t)$, ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \psi_1\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \psi_1\,dt.$$

Da die Funktion $\psi_1(t)$ das Vorzeichen nicht wechselt, so kann man sie so normieren, daß

$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi_1\,dt = 1.$$

Dann ist

$$\varphi(t) = \operatorname{tg}\alpha \cdot [\psi_1(t) - 1]$$

die unserer Bedingung genügende Lösung von (4).

Ist dabei die kleinste Wurzel $\cos\alpha < 1$, so haben wir Schwingungen um eine Gleichgewichtslage $\alpha \neq 0$ vor uns. Diejenige Frequenz des Aufhängepunktes, für die gerade $\cos\alpha = 1$ wird, ist die kritische Frequenz; denn für Frequenzen, für die $\cos\alpha > 1$, ist die Stabilisierung gar nicht möglich.

Einiges sei noch über die Rolle gesagt, die die Dämpfung bei diesen Betrachtungen spielt. Führt man den Grenzübergang $\varkappa \to 0$ durch, so gewinnt man für das ungedämpfte System ($\varkappa = 0$) das Resultat, daß für dieses die kleinste Wurzel der Gleichung

$$1 = f(\cos \alpha)$$

genommen werden muß, zu der eine periodische Lösung gehört. Hätte man von vornherein $\varkappa = 0$ gesetzt, so könnte man aus den vorhin angegebenen sehr einfachen Überlegungen nur schließen, daß $\Re \mu = 0$. μ müßte dann rein imaginär sein, könnte aber dafür alle imaginären Werte annehmen. Man hätte dann nicht nur periodische Lösungen zu betrachten, sondern allgemeiner stabile, d. h. solche Lösungen, die stets innerhalb endlicher Schranken verbleiben[13]. Man hat sich bisher von vornherein auf periodische Lösungen beschränkt, ohne eine hinreichende Begründung für das Ausschließen der anderen stabilen Lösungen (die, nebenbei gesagt, periodische Funktionen zweiter Art sind) angeben zu können. Hierzu ist bei verschwindender Dämpfung auch gar kein Grund vorhanden. Man würde dann nicht Gleichgewichtslagen, sondern ganze Gleichgewichtsgebiete bekommen (etwa so, wie man bei der Behandlung der Schüttelerscheinungen elektrischer Lokomotiven, die auf eine homogene Hillsche Differentialgleichung führt, nicht diskrete Schüttelgeschwindigkeiten, sondern ganze Bereiche von solchen festgestellt hat)[14]. Die richtige Stabilisierung des Vorganges wird also gerade durch die Dämpfung bewirkt, was natürlich nicht hindern kann, in Fällen, wo sie sicher sehr klein ist, in der fertigen Lösung $\varkappa$ gegen Null gehen zu lassen.

Diskussion des Falles tg $\alpha = 0$. Wir haben früher den Fall tg $\alpha = 0$ ausschließen müssen und holen hier seine Diskussion nach. Wenn wir zunächst $\cos \alpha = 1$, $\alpha = 0^\circ$ annehmen, geht (4) über in

$$\ddot{\varphi} + 2 \varkappa n \dot{\varphi} - \frac{g - \ddot{\eta}}{l} \cdot \varphi = 0 .$$

Mit $$\varphi(t) = e^{-\varkappa n t} \chi(t)$$

bekommt man $$\ddot{\chi}(t) - \left(\frac{g - \ddot{\eta}}{l} + \varkappa^2 n^2\right) \chi(t) = 0 .$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung haben nach dem Theorem von Floquet die Form

$$\chi_1(t) = e^{\overline{\mu} n t} \cdot \overline{F}(2 \pi n t) \qquad \text{und} \qquad \chi_2(t) = e^{-\overline{\mu} n t} \cdot \overline{F}(-2 \pi n t) .$$

Dann ist

$$\varphi_1(t) = e^{(-\varkappa + \overline{\mu}) n t} \cdot \overline{F}(2 \pi n t) \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(t) = e^{(-\varkappa - \overline{\mu}) n t} \cdot \overline{F}(-2 \pi n t) ,$$

wobei $$\operatorname{Cof} \overline{\mu} = f(\cos 0^\circ) = f(1) .$$

Für solche Werte von n, für die die kleinste Wurzel der Gl. (9) $\cos \alpha > 1$ ist, wo also die Stabilisierung nicht möglich ist, ist

$$\operatorname{Cof} \overline{\mu} > \operatorname{Cof} \varkappa , \quad \overline{\mu} > \varkappa .$$

$\varphi_1(t)$ wächst unbegrenzt, $\varphi_2(t)$ klingt ab. In diesem Falle gibt es wohl kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage $\alpha = 0$, die aber labil sind. Für solche Werte von n, für die $\cos \alpha < 1$ wird, für welche die Stabilisierung also möglich ist, haben wir

$$\operatorname{Cof} \overline{\mu} < \operatorname{Cof} \varkappa , \quad \overline{\mu} < \varkappa .$$

Beide Lösungen klingen ab. In diesem Falle sind also gedämpfte Schwingungen möglich. Nur in dem Falle, daß

$$\operatorname{Cof} \overline{\mu} = \operatorname{Cof} \varkappa ,$$

wo also $$\operatorname{Cof} \varkappa = f(1) ,$$

stellt die eine Lösung einen stationären Schwingungszustand dar. Dieser Fall aber ordnet sich der allgemeinen Theorie unter.

Nimmt man jetzt $\alpha = 180^\circ$ an, also $\cos \alpha = -1$, so wird man auf dieselbe Differentialgleichung geführt, die auch der Untersuchung von Schüttelerscheinungen elektrischer Lokomotiven zugrunde liegt. Bezüglich der Literatur dieses Problems sei auf Strutt l. c. hingewiesen. Die für uns in erster Linie in Betracht kommenden Arbeiten sind die von Meißner und

[13]) Die analytische Durchrechnung dieses Falles scheint uns im allgemeinen auf große Schwierigkeiten zu stoßen. Sie würde vermutlich ergeben, daß die nichtperiodischen stabilen Lösungen keine kleinen Schwingungen mit dem Mittelwert 0 ergeben.

[14]) Freilich haben hier diese Gleichgewichtsbereiche keine physikalische Bedeutung.

Müller. Es genügt hier darüber folgendes zu sagen: Wenn die Frequenz des Aufhängepunktes wächst, wechseln Gebiete ab, wo beide Lösungen stabil sind (bzw. abklingen, wenn eine Dämpfung vorhanden ist), mit solchen, wo die eine Lösung abklingt, die andere aber unendlich anwächst (Schüttelgebiete). Getrennt werden je zwei dieser Gebiete durch Frequenzen, bei denen die eine Lösung rein periodisch ist, die andere abklingt (wenn das System gedämpft ist).

II. Spezieller Teil.

Schwingungen des Aufhängepunktes. Bisher wurde von den Schwingungen des Aufhängepunktes nur vorausgesetzt, daß sie periodisch sind. Alle Aussagen, die wir bisher gemacht haben, gelten daher für beliebige (periodische) Schwingungen. Die explizite Durchrechnung ist aber im allgemeinen Falle nicht durchführbar. Wir müssen eine spezielle Form der Schwingungen des Aufhängepunktes annehmen, um mehr Einzelheiten von dem Verhalten des Pendels zu erfahren, und wählen dazu eine Form, für welche die Hillsche Differentialgleichung explizite lösbar ist, und die dabei die harmonische Schwingung hinreichend gut annähert.

Den Arbeiten von Hirsch und Bock liegt die sehr naheliegende Annahme zugrunde, daß der Aufhängepunkt eine harmonische Bewegung vollführt, daß also

$$\eta = A_s \cdot \sin 2\pi n t .$$

In der vorliegenden Arbeit soll angenommen werden, daß die Zeit-Weg-Kurve des Aufhängepunktes aus Parabelbogen zusammengesetzt ist, welche die Sinuskurve so annähern, daß die kinetische Energie der Ersatzbewegung ebenso groß ist wie die der ursprünglichen. Die Parabelbogen sind so aneinandergestückelt, daß sie an den Nahtstellen $t = \varrho \frac{T}{2}$ $(\varrho = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ samt Tangente stetig ineinander übergehen (siehe Abb. 2). Die Beschleunigung ist dann abteilungsweise konstant.

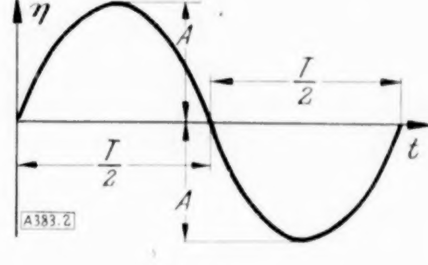


Abb. 2.

Wenn, wie im folgenden überall I das Intervall $0 \leq t \leq \frac{1}{2} T$, II aber das Intervall $\frac{1}{2} T \leq t \leq T$ bedeutet, so ist

$$\left.\begin{aligned} &\text{in I} \quad \eta = -16 A n^2 t \left(\frac{1}{2} T - t\right), \\ &\text{in II} \quad \eta = 16 A n^2 \left(t - \frac{1}{2} T\right)(T - t) \end{aligned}\right\} \qquad (13).$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Dann ist in I} \quad \ddot\eta &= 32 A n^2, \\ \text{in II} \quad \ddot\eta &= -32 A n^2 \end{aligned}\right\} \qquad (14).$$

Die auf die Masseneinheit bezogene kinetische Energie $\int_0^{T/2} \dot\eta^2 \, dt$ ist

im Falle der harmonischen Bewegung $\int_0^{T/2} (2\pi n A_s \cdot \cos 2\pi n t)^2 \, dt = \pi^2 A_s^2 \cdot n$,

im Falle der Ersatzbewegung $\int_0^{T/2} \left[16 A n \left(\frac{1}{2} T - 2t\right)\right]^2 dt = \frac{32}{3} A^2 n$.

Durch Gleichsetzen bekommt man

$$A^2 = \frac{3\pi^2}{32} A_s^2 \qquad (15).$$

Die Amplituden der beiden Schwingungen sind nahezu gleich.

Berechnung der Lösung. Setzt man (13) bzw. (14) in (7) ein, so bekommt man für χ die Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\text{in I} \quad \ddot\chi - n^2 (32 a \sigma \cos \alpha + \varkappa^2 - 32 a \cos \alpha) \chi = 0 \\ &\text{in II} \quad \ddot\chi - n^2 (32 a \sigma \cos \alpha + \varkappa^2 + 32 a \cos \alpha) \chi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

mit

$$a = \frac{A}{l}, \quad \sigma = \frac{g T^2}{32 A}, \quad n T = 1 \qquad (17).$$

a ist die „relative Amplitude" der Schwingungen des Aufhängepunktes (bezogen auf die Einheit der Pendellänge), σ eine dimensionslose Konstante, die dem Quadrate der Schwingungszahl des Aufhängepunktes umgekehrt proportional ist, n eben diese Schwingungszahl.

(16) ist eine spezielle Hillsche Differentialgleichung, deren periodische Funktion abteilungsweise konstant ist. Solche Differentialgleichungen hat schon Meißner[15]) betrachtet (siehe auch bei Strutt, S. 39/40). Ihre Lösung kann explizite hergestellt werden, ebenso die zu ihr gehörige Gl. (9).

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} &32\,a\,\sigma\cos a+\varkappa^2-32\,a\cos a=-4\,h^2 \\ \text{und}\quad &32\,a\,\sigma\cos a+\varkappa^2+32\,a\cos a=-4\,k^2\,{}^{16)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (18),$$

so nimmt (16) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot\chi+(2\,h\,n)^2\,\chi=0 \quad \text{in I} \\ &\ddot\chi+(2\,k\,n)^2\,\chi=0 \quad \text{in II} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (19).$$

Da h sowohl als auch k konstant sind, ist

$$\begin{aligned} &\text{in I} \quad \chi(t)=c_1\cos 2\,h\,n\,t+c_2\sin 2\,h\,n\,t, \\ &\text{in II} \quad \chi(t)=c_3\cos 2\,k\,n\,t+c_4\sin 2\,k\,n\,t. \end{aligned}$$

Für $t=\frac{1}{2}\,T$ muß die Elongation sowohl als auch die Geschwindigkeit stetig sein

$$\left.\begin{aligned} &\chi\left(\frac{1}{2}\,T-0\right)=\chi\left(\frac{1}{2}\,T+0\right), \quad \dot\chi\left(\frac{1}{2}\,T-0\right)=\dot\chi\left(\frac{1}{2}\,T+0\right)^{17)}, \\ &\text{ferner nach (10) und (12):}\quad \chi(T)=e^{\varkappa}\,\chi(0), \qquad \dot\chi(T)=e^{\varkappa}\,\dot\chi(0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20).$$

Die vier Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen ergeben ein homogenes, lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4

$$\left.\begin{aligned} c_1\cos h\quad &+c_2\sin h \quad -c_3\cos k \quad -c_4\sin k=0 \\ -c_1\,h\cdot\sin h&+c_2\,h\cdot\cos h+c_3\,k\cdot\sin k-c_4\,k\cdot\cos k=0 \\ c_1\,e^{\varkappa}\quad &\qquad\qquad -c_3\cos 2\,k \quad -c_4\sin 2\,k=0 \\ &c_2\,h\cdot e^{\varkappa}\quad +c_3\,k\cdot\sin 2\,k-c_4\,k\cdot\cos 2\,k=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21),$$

das eine nichttriviale Lösung nur dann besitzt, wenn seine Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos h, & \sin h, & -\cos k, & -\sin k \\ -h\sin h, & h\cos h, & k\sin k, & -k\cos k \\ e^{\varkappa}, & 0, & -\cos 2\,k, & -\sin 2\,k \\ 0, & h\,e^{\varkappa}, & k\sin 2\,k, & -k\cos 2\,k \end{vmatrix}$$

verschwindet. Daraus geht die Gleichung hervor, die der Gl. (9) der allgemeinen Theorie entspricht (h und k enthalten $\cos a$):

$$\mathfrak{Cof}\,\varkappa=\cos h\cdot\cos k-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{k}+\frac{k}{h}\right)\cdot\sin h\cdot\sin k \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Rechnet man aus (21) unter der Voraussetzung des Bestehens von (22) die Konstanten c_1 bis c_4 aus, so bekommt man bis auf einen vorderhand unbestimmten Faktor b:

$$\left.\begin{aligned} \text{in I}\quad \chi(t)=b\Big\{&\left(\sin h\cdot\cos k+\frac{h}{k}\cdot\sin h\cdot\sin k\right)\cdot\cos 2\,h\,n\,t \\ &+\left[\mathfrak{Sin}\,\varkappa-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{h}-\frac{h}{k}\right)\cdot\sin h\cdot\sin k\right]\cdot\sin 2\,h\,n\,t\Big\} \\ \text{in II}\quad \chi(t)=b\Big\{&\left(e^{\varkappa}\cdot\sin h+\frac{h}{k}\cdot\sin k\right)\cdot\cos k\,(2\,n\,t-1) \\ &+\frac{h}{k}\,(e^{\varkappa}\cos h-\cos k)\cdot\sin k\,(2\,n\,t-1)\Big\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23).$$

[15]) E. Meißner: Über Schüttelschwingungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. Schweizer Bauzeitung, Bd. 72 (1918), S. 95 bis 99.

[16]) Dieses k ist nicht mit dem früher ebenso bezeichneten Trägheitsradius zu verwechseln.

[17]) $\chi\left(\frac{1}{2}\,T-0\right)=\chi\left(\frac{1}{2}\,T\right)\Big|^{\mathrm{I}}, \quad \chi\left(\frac{1}{2}\,T+0\right)=\chi\left(\frac{1}{2}\,T\right)\Big|^{\mathrm{II}}.$

b ist aus der Forderung

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\varkappa n t}\chi(t)\,dt = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

zu bestimmen, die für b immer einen endlichen von Null verschiedenen Wert liefert, wie wir (siehe S. 239) ganz allgemein gezeigt haben.

Der Fall verschwindender Dämpfung. Wie wir im allgemeinen Teil gezeigt haben, bekommt man die Gleichgewichtsbedingungen des ungedämpften Systems, wenn man in der Grundgleichung des gedämpften Systems $\varkappa$ gegen 0 gehen läßt. Dabei geht (22) über in

$$1 = \cos h \cdot \cos k - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h}\right) \cdot \sin h \cdot \sin k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

und die Gleichungen (18) in

$$h^2 = 8\,a\,(1-\sigma)\cos\alpha \quad \text{und} \quad -k^2 = 8\,a\,(1+\sigma)\cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (26).$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß (25) eine gerade Funktion von h und k ist, also eine eindeutige reelle Funktion von h^2 und k^2. In Abb. 3 ist die durch (25) dargestellte Kurve eingetragen in ein Koordinatensystem, dessen Abszisse h^2 und dessen Ordinate k^2 ist. Nach (26) ist

$$\frac{k^2}{h^2} = -\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27).$$

Die in Frage kommenden Werte h, k bekommt man, wenn man die Kurve (25) zum Schnitt bringt mit der durch (27) dargestellten Geraden, die durch den Ursprung geht und mit der positiven h^2-Achse einen zwischen $-45°$ und $-135°$ liegenden Winkel einschließt. Da nämlich $0 < n < \infty$, ist $\infty > \sigma > 0$, woraus unter Zuhilfenahme von (27) obige Behauptung folgt.

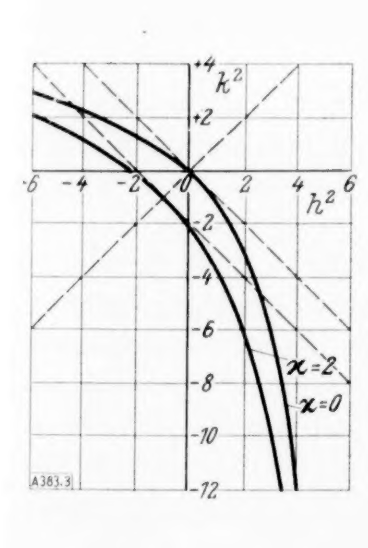


Abb. 3.

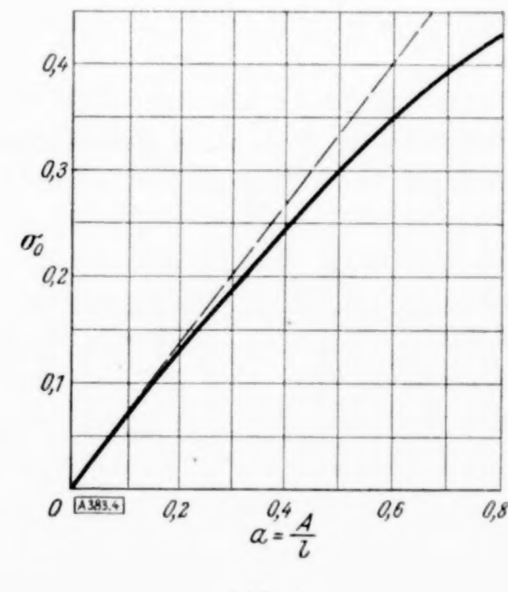


Abb. 4.

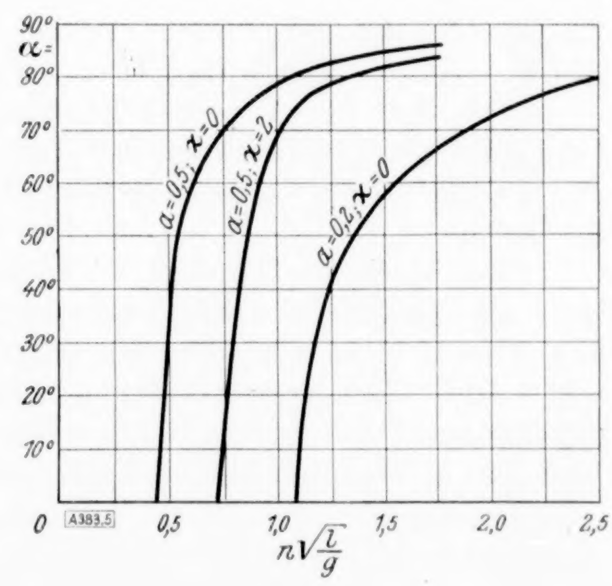


Abb. 5.

h^2 und k^2 können dabei nicht beliebige Werte annehmen, wenn eine Gleichgewichtslage wirklich existieren soll. Nach (26) ist $h^2 - k^2 = 16\,a\cos\alpha$; da aber $|\cos\alpha| \leq 1$, muß $|h^2 - k^2| \leq 16\,a$. Die für uns in Betracht kommenden Punkte (h^2, k^2) liegen innerhalb des durch die Geraden

$$h^2 - k^2 = 16\,a \quad \text{und} \quad h^2 - k^2 = -16\,a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

begrenzten Parallelstreifens, dessen Breite noch von der relativen Amplitude abhängt (zu ihr proportional ist). Dieser Parallelstreifen liegt symmetrisch in bezug auf die Gerade $h^2 - k^2 = 0$, die auch die Symmetrieachse der Kurve (25) ist.

Für $\sigma = 0\;(n = \infty)$ berührt die Gerade (27) unsere Kurve im Punkte $h^2 = k^2 = 0$. In diesem Falle muß auch $\cos\alpha = 0$ sein, also $\alpha = 90°$. Bei unendlich hoher Frequenz des Aufhängepunktes schwingt das Pendel um die horizontale Lage! (Dies wurde bereits von Hirsch mit anderen Methoden gezeigt.)

Wächst jetzt σ (nimmt die Frequenz des Aufhängepunktes ab), so wird sich der nichttriviale Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve (25) immer mehr vom Nullpunkt entfernen.

Solange sich dieser Schnittpunkt innerhalb des durch (28) bestimmten Parallelstreifens bewegt, gibt es immer eine Gleichgewichtslage, die man aus (26) zu

$$\cos\alpha = \frac{h^2 - k^2}{16\,a}$$

berechnet und die bei einer Frequenz auftritt, die sich aus

$$\sigma = \frac{-h^2 - k^2}{h^2 - k^2}$$

ergibt.

Diejenige Frequenz, für die $\cos\alpha = 1$ wird, für die also der Schnittpunkt der durch (27) dargestellten Geraden mit der durch (25) dargestellten Kurve genau auf die Begrenzung des Parallelstreifens fällt, nennen wir die kritische Frequenz. Für diese Frequenz wird $\alpha = 0$, das Pendel stellt sich vertikal.

Überschreitet σ diesen Wert σ_0, d. h. wird die Frequenz kleiner als die kritische, so haben (25) und (27) keinen nichttrivialen Schnittpunkt innerhalb des durch (28) bestimmten Parallelstreifens, das Pendel hat überhaupt keine Gleichgewichtslage (bis auf die triviale $\alpha = 180^\circ$).

Die kritische Frequenz hängt noch von a ab und kann bestimmt werden, indem man in h und k für $\cos\alpha$ Eins setzt.

Dann ist

$$h = \sqrt{8\,a\,(1-\sigma_0)}, \qquad k = i\sqrt{8\,a\,(1+\sigma_0)}.$$

Setzt man diese Werte in (25) ein, so bekommt man

$$1 = \cos\sqrt{8\,a\,(1-\sigma_0)} \cdot \mathfrak{Cof}\sqrt{8\,a\,(1+\sigma_0)} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\sigma_0^2}} \sin\sqrt{8\,a\,(1-\sigma_0)} \cdot \mathfrak{Sin}\sqrt{8\,a\,(1+\sigma_0)} \quad . \quad (29).$$

Aus (17) folgt

$$\frac{n_0^2\,l}{g} = \frac{1}{32\,a\,\sigma_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Zu jedem a kann man aus (29) σ_0 berechnen und aus (30) die kritische Schwingungszahl n_0, wenn noch die Pendellänge l gegeben ist.

Die für die kritische Frequenz maßgebende Größe σ_0 wurde für einzelne Werte der relativen Amplitude berechnet und das Ergebnis in Abb. 4 eingetragen, die σ_0 als Funktion von a zeigt (voll ausgezogene Kurve). Es zeigt sich, daß σ_0 mit a wächst, daß also (siehe (30)) die kritische Frequenz bei wachsender relativer Amplitude abnimmt.

Bei einer bestimmten vorgegebenen relativen Amplitude kann jetzt die Gleichgewichtslage als Funktion der Schwingungszahl des Aufhängepunktes wie folgt bestimmt werden: aus Abb. 4 oder aus den Gl. (29) und (30) entnimmt man die kritische Frequenz, für die $\alpha = 0$ ist. Gleichgewichtslagen sind vorhanden für alle $n > n_0$ und sind in der oben angegebenen Weise zu ermitteln. Man kann sie dann als Funktion von n auftragen. In Abb. 5 sind für $a = 0{,}2$ und $a = 0{,}5$ die Gleichgewichtslagen als Funktion der dimensionslosen Größe $n\sqrt{l/g}$ aufgetragen. Wie alle Gleichgewichtskurven haben auch die beiden aufgezeichneten die Gerade $\alpha = 90^\circ$ zur Asymptote.

Näherungsweise Berechnung der kritischen Frequenz und der Gleichgewichtslage bei raschen und kleinen Schwingungen des Aufhängepunktes. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß bei sehr hohen Frequenzen des Aufhängepunktes das Pendel nahezu horizontal schwingt, daß also $\cos\alpha$ sehr klein gegen Eins ist. Nach (26) müssen dann auch h^2 und k^2 sehr klein sein. Andererseits sind bei einer geringen relativen Amplitude a, h^2 und k^2 stets sehr klein, was für Werte auch $\cos\alpha$ annehmen mag, da jedenfalls $\sigma < 1$, wie aus Abb. 3 oder auch dem Diagramm der kritischen Frequenzen ersichtlich ist. In beiden Fällen, die alle für uns interessanten umfassen, sind h^2 und k^2 klein, und man kann eine erste Näherung erhalten, wenn man die rechte Seite von (25) nach steigenden Potenzen von h und k entwickelt und die Glieder 3. Ordnung in h^2 und k^2 vernachlässigt. So bekommt man

$$1 = 1 - (h^2 + k^2) + \frac{1}{24}(3\,h^4 + 10\,h^2\,k^2 + 3\,k^4) + 0\,(h^6, k^6).$$

Wenn man (26) in diese Gleichung einführt, bekommt man als erste Näherung für die Gleichgewichtslage

$$\cos\alpha = \frac{3\,\sigma}{2\,a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Wir wollen zunächst zeigen, daß (31) genau die Hirschsche Formel liefert, die also als erste Näherung der Lösung der von uns aufgestellten Gleichung erscheint. Nach (17) ist

$$a = \frac{A}{l}, \qquad \sigma = \frac{g\,T^2}{32\,A} = \frac{g}{32\,A\,n^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{3\,g\,l}{64\,A^2 n^2}.$$

Berücksichtigt man noch, daß nach (15)

$$A^2 = \frac{3\pi^2}{32}\cdot A_s^2,$$

so wird

$$\cos\alpha = \frac{g\,l}{2\pi^2 A_s^2\, n^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31\,\mathrm{a}).$$

Wenn man in der Formel (14b) auf S. 48 in der Arbeit von Hirsch $\vartheta = 0$ setzt, wie es unserem Falle des in der Schwererichtung oszillierenden Pendels entspricht, und für K gemäß (13) auf S. 47

$$K = \frac{\pi^2 n^2 A_s^2}{l\,g}$$

einführt, so geht die Formel (14b) der oben zitierten Arbeit in unsere Formel (31a) über.

Es zeigt sich also, daß die Voraussetzungen der Arbeit von Hirsch sind: entweder kleine Amplitude oder aber hohe Schwingungszahl des Aufhängepunktes, Voraussetzungen, von denen man sich leicht befreien kann; dann aber auch die Voraussetzung, daß das Pendel um eine Gleichgewichtslage kleine Schwingungen ausführe, eine Voraussetzung, die auch unserer Arbeit zugrunde liegt und deren Aufgeben das Problem wesentlich komplizieren würde.

Zum Vergleich der Hirschschen Resultate mit unseren genaueren Ergebnissen sind die kritischen Frequenzen, wie sie sich aus (31) ergeben, in Abb. 4 eingetragen (strichlierte Gerade). Für $\cos\alpha = 1$ bekommt man

$$\sigma_0 = \frac{2\,a}{3}$$

die Gleichung einer Geraden, die die richtige Kurve der kritischen Frequenzen in $a = 0$, $\sigma = 0$ berührt und sie für kleine a und σ gut annähert. Aber schon bei $a = 0{,}2$ ist der Fehler, den man begeht, wenn man die voll ausgezogene Kurve durch die strichlierte Gerade annähert, merklich groß.

Berücksichtigung der Dämpfung. Ist die Reibung nicht Null beziehungsweise so klein, daß man sie vernachlässigen kann, so hat man an Stelle der Gl. (25)

$$\mathfrak{Cof}\,\varkappa = \cosh\cdot\cos k - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h}\right)\sinh\cdot\sin k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22),$$

und an Stelle von (27) gewinnt man aus (18)

$$\frac{4\,k^2 + \varkappa^2}{4\,h^2 + \varkappa^2} = -\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Der Schnittpunkt der Kurve (22) mit der Geraden (32) ergibt h^2 und k^2; dann ist

$$\cos\alpha = \frac{h^2 - k^2}{16\,a}.$$

Aus (22) geht hervor, daß unsere Kurve den Punkt $h = k = \frac{1}{2}\,i\,\varkappa$, d. h. $h^2 = k^2 = -\frac{1}{4}\,\varkappa^2$ enthält, und daß sie symmetrisch in bezug auf die Gerade $h^2 = k^2$ ist.

Offenbar ist (32) die Gleichung einer Geraden, in der h^2-, k^2-Ebene, die durch den Scheitel der Kurve (22), nämlich durch den Punkt $h^2 = k^2 = -\frac{1}{4}\,\varkappa^2$ geht und mit der positiven h^2-Achse einen zwischen -45° und -135° liegenden Winkel einschließt.

Ist $\varkappa$ zahlenmäßig gegeben, so kann man die zugehörige Kurve (22) zeichnen und die Ermittlung der Gleichgewichtslagen, der kritischen Frequenzen geht ebenso vor sich wie früher. Für $\varkappa = 2$ ist die Kurve in Abb. 3 wirklich eingezeichnet und in Abb. 5 die Gleichgewichtslagen für $\varkappa = 2$, $a = 0{,}5$.

Näherungsrechnungen für kleine Reibung. Ist $\varkappa$ klein, so befindet sich der Scheitel der Kurve (22) in der Nähe des Ursprunges. Für große Frequenzen oder kleine Amplituden befindet sich der in Betracht kommende Schnittpunkt in der Nähe des Scheitels, also wieder in der Nähe des Ursprunges, so daß man h^2 und k^2 klein voraussetzen darf. Entwickelt man wieder (22) nach Potenzen von h und k und vernachlässigt die Glieder 3. Ordnung in h^2 und k^2, so bekommt man

$$\mathfrak{Cof}\,\varkappa = 1 - (h^2 + k^2) + \frac{1}{24}(3\,h^4 + 10\,h^2\,k^2 + 3\,k^4) + 0\,(h^6, k^6)\,.$$

Setzt man in diese Gl. (18) ein und entwickelt die linke Seite nach Potenzen von $\varkappa$, so bekommt man bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\cos a = \frac{(6 + \varkappa^2)\,\sigma}{4\,a} \quad \text{(33)}$$

eine Formel, die für $\varkappa = 0$ in (31) übergeht und zeigt, daß bei kleiner Dämpfung der Einfluß derselben numerisch gering ist und daß dieser Einfluß in einer Verkleinerung von a besteht. Die kritische Frequenz wird durch die Reibung erhöht.

Näherungsrechnungen für große Reibung. Der Schnittpunkt der Kurve (22) mit der Geraden (32) fällt bei großen Frequenzen oder bei kleinen Amplituden des Aufhängepunktes in die Nähe des Scheitels $h^2 = k^2 = -\frac{1}{4}\varkappa^2$, so daß in diesem Falle $4\,h^2 + \varkappa^2$ und $4\,k^2 + \varkappa^2$ klein sind. Ist die Reibung groß, so kann man annehmen, daß

$$|\,4\,h^2 + \varkappa^2\,| = |\,32\,(1 - \sigma)\,a \cos a\,| \ll \varkappa^2$$

und

$$|\,4\,k^2 + \varkappa^2\,| = |\,32\,(1 + \sigma)\,a \cos a\,| \ll \varkappa^2.$$

Entwickelt man die rechte Seite von (22) in die Taylorsche Reihe in der Umgebung der Stelle $h^2 = k^2 = -\frac{1}{4}\varkappa^2$ und vernachlässigt wieder die Glieder 3. Ordnung in $\left(h^2 + \frac{1}{4}\varkappa^2\right)$, $\left(k^2 + \frac{1}{4}\varkappa^2\right)$, so kommt man auf die Gleichung

$$-\left[\left(h^2 + \frac{\varkappa^2}{4}\right) + \left(k^2 + \frac{\varkappa^2}{4}\right)\right]\frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa}{\varkappa} + \left[\left(h^2 + \frac{\varkappa^2}{4}\right) + \left(k^2 + \frac{\varkappa^2}{4}\right)\right]^2\frac{\mathfrak{Cof}\,\varkappa}{\varkappa^2}$$
$$-\left[\left(h^2 + \frac{\varkappa^2}{4}\right)^2 + \left(k^2 + \frac{\varkappa^2}{4}\right)^2\right]\frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa}{\varkappa^3} - \left[\left(h^2 + \frac{\varkappa^2}{4}\right) - \left(k^2 + \frac{\varkappa^2}{4}\right)\right]^2\frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa}{\varkappa^4} = 0\,.$$

Setzt man hierin

$$h^2 + \frac{1}{4}\varkappa^2 = 8\,(\sigma - 1)\,a \cos a$$

und

$$k^2 + \frac{1}{4}\varkappa^2 = 8\,(\sigma + 1)\,a \cos a$$

und vernachlässigt man höhere Potenzen von σ (entsprechend der Tatsache, daß für hohe Frequenzen σ sehr klein ist), so kann man als erste Näherung bekommen:

$$\cos a = \frac{\sigma\,\varkappa^3}{8\,a\,(2 + \varkappa)} \quad \text{(34)}$$

oder, wenn $\varkappa \gg 2$:

$$\cos a = \frac{\sigma\,\varkappa^2}{8\,a} \quad \text{(34 a).}$$

Die Formel zeigt qualitativ dieselbe Abhängigkeit von σ und a wie (31). Für große $\varkappa$, für die sie allein gültig ist, zeigt sich wieder, daß durch die Dämpfung $\cos a$ vergrößert, a also verkleinert wird. Der Einfluß ist hier ganz beträchtlich.

Die kritische Frequenz ergibt sich aus (34 a), indem man $\cos a = 1$ setzt

$$\sigma_0 = \frac{8\,a}{\varkappa^2}\,.$$

Gegenüber dem Werte der kritischen Frequenz bei ungedämpftem System zeigt es sich, daß σ_0 beträchtlich abnimmt, also die kritische Frequenz, die geringste Frequenz, bei der diese Stabilisierung noch möglich ist, stark zunimmt. Ja, wenn die Reibung über alle Grenzen wüchse, würde auch die kritische Frequenz, unterhalb deren sich die hier behandelten Erscheinungen gar nicht zeigen, unbegrenzt zunehmen, die Stabilisierung wäre gar nicht möglich. (Selbstverständlich ist hier die Stabilisierung von Schwingungen gemeint. Daß solch ein Pendel in jeder Stellung in statischem Gleichgewicht verharren kann, ist einleuchtend.)

Diskussion des Falles tg $\alpha = 0$. Der Fall tg $\alpha = 0$ ist ein Ausnahmefall der allgemeinen Theorie und muß auch bei diesem Beispiel speziell diskutiert werden.

Wenn wir zunächst $\cos\alpha = 1$, $\alpha = 0^0$ nehmen, so gehen die Gl. (18) und (19) über in

$$-4h^2 = 32\,a\,\sigma + \varkappa^2 - 32\,a$$
$$-4k^2 = 32\,a\,\sigma + \varkappa^2 + 32\,a,$$

bzw. in I $\quad \ddot{\chi} + (2hn)^2\chi = 0$

in II $\quad \ddot{\chi} + (2kn)^2\chi = 0.$

Es ist in diesem Falle

$$h^2 - k^2 = 16\,a$$
$$h^2 + k^2 = -16\,a\,\sigma - \frac{1}{2}\varkappa^2.$$

Da $0 < \sigma \leqq \infty$, so ist $-\frac{1}{2}\varkappa^2 > h^2 + k^2 \geqq -\infty$.

$h^2 + k^2 = -\frac{1}{2}\varkappa^2$ ist die Gleichung der Tangente unserer Kurve (22) in ihrem Scheitel. (In Abb. 3 strichliert.) Die Gerade $h^2 - k^2 = 16\,a$ steht senkrecht auf dieser strichlierten Geraden und schneidet diese sowohl als auch unsere Kurve (22), erstere für $\sigma = 0$, letztere für $\sigma = \sigma_0$.

Wächst nun σ von Null, so wird sich der auf $h^2 - k^2 = 16\,a$ befindliche Punkt immer mehr von der strichlierten Tangente entfernen. Solange $\sigma < \sigma_0$, befindet er sich im Gebiet zwischen Tangente und Kurve, wo sicher $\Re\,\mu < \varkappa$, beide Lösungen klingen ab, das Pendel kann keine stabilen Schwingungen um die Nullage ausführen. Das sind nämlich gerade die Schwingungszahlen oberhalb der kritischen, und das Pendel hat eine von Null verschiedene Gleichgewichtslage, die wir früher berechnet haben. Wenn der wandernde Punkt gerade in den Schnittpunkt der Geraden $h^2 - k^2 = 16\,a$ mit der Kurve (22) fällt, ist $\sigma = \sigma_0$, wir haben die kritische Frequenz vor uns, das Pendel führt um die Nullage stabile Schwingungen aus. Überschreitet σ diesen Wert, liegt der Punkt jenseits der Kurve, so ist $\Re\,\mu > \varkappa$, die eine Lösung klingt ab, die andere wächst über alle Grenzen, wir haben labile Schwingungen vor uns, für alle Frequenzen, die kleiner sind als die kritische.

Über $\alpha = 180^0$ siehe das im allgemeinen Teil Gesagte.

Zusammenfassung. Wir haben gezeigt, daß ein Pendel, dessen Aufhängepunkt in vertikale Schwingungen versetzt wird, um eine schräg nach oben gerichtete Mittellage Schwingungen ausführen kann, wenn die Frequenz des Aufhängepunktes einen Schwellenwert überschreitet, den wir als die kritische Frequenz bezeichneten und von der wir zeigten, daß sie von der Amplitude der Schwingungen des Aufhängepunktes und der Dämpfung des Systems abhängt. Es wurde eine Methode entwickelt, die es gestattet, bei vorgegebener Amplitude der Oszillationen des Aufhängepunktes und Dämpfung des ganzen Systems die kritische Frequenz sowie die Gleichgewichtslage für jede Frequenz oberhalb derselben zu berechnen. Näherungsformeln für sehr kleine und sehr rasche Schwingungen des Aufhängepunktes ergaben bei verschwindender Dämpfung die von Hirsch aufgestellte Formel und zeigten, daß sie für gedämpfte Systeme eine zu kleine kritische Frequenz und einen zu großen Gleichgewichtswinkel ergibt. Die für gedämpfte Systeme geltenden Näherungsformeln zeigten noch, daß mit unbegrenzt wachsender Dämpfung die kritische Frequenz über alle Grenzen wächst, eine Stabilisierung also nicht mehr möglich ist.

Zum Schlusse sei mir gestattet, Herrn Professor Weyrich meinen Dank auszusprechen, der nicht nur die Anregung zu dieser Arbeit gab, sondern in eingehenden Besprechungen mir auch Gelegenheit bot, über wichtige Punkte Klarheit zu verschaffen.

Brünn, Mathematisches Seminar der Deutschen Technischen Hochschule, 27. März 1933.

Konstruktion eines Fräsers, der eine gegebene Schraubenfläche erzeugt.

Von *Othmar Baier* in München.

A. Erklärung der Konstruktion.

1. Vorbemerkungen. Eine Schraubenfläche $[A]$ sei vorgegeben. Ihre Achse sei a und ihre Ganghöhe h. Die Schraubenfläche $[A]$ kann stets durch Verschraubung einer auf ihr liegenden Kurve (C) erzeugt werden. Gesucht ist der Meridian desjenigen Fräsers $[F]$ (d. i. derjenigen Drehfläche), der bei Drehung um die noch beliebig vorgebbare Achse b in ein Werkstück die gegebene Schraubenfläche $[A]$ fräst, wenn sich das Werkstück bei einer Volldrehung um die Achse a um die Ganghöhe h in Richtung der Achse a verschiebt[1]).

Der Fräser $[F]$ wird die Schraubenfläche $[A]$ in den Punkten einer Kurve, der Eingriffslinie, berühren. Falls es gelungen ist, die Eingriffslinie zu ermitteln, kann man aus ihr leicht die Form des Fräsermeridians konstruieren, da der Fräser $[F]$ durch Drehung der Eingriffslinie um die Achse b entstanden gedacht werden kann.

Es soll eine Methode angegeben werden, mit der die Eingriffslinie rasch punktweise ermittelt werden kann.

Die Normalen der Schraubenfläche $[A]$ in den Punkten der Eingriffslinie müssen als Normalen von $[F]$ die Fräserachse b treffen. Es handelt sich also darum, diejenigen unter den Normalen der Schraubenfläche $[A]$ ausfindig zu machen, welche die Fräserachse b schneiden. Die Gesamtheit ihrer Fußpunkte auf der Schraubenfläche $[A]$ bildet dann die Eingriffslinie.

2. Hilfsbetrachtung (vgl. Abb. 1). Wir konstruieren zunächst in einem beliebigen Punkt P der Kurve (C) die Normale n der Schraubenfläche $[A]$[2]). Wird die Normale n längs der

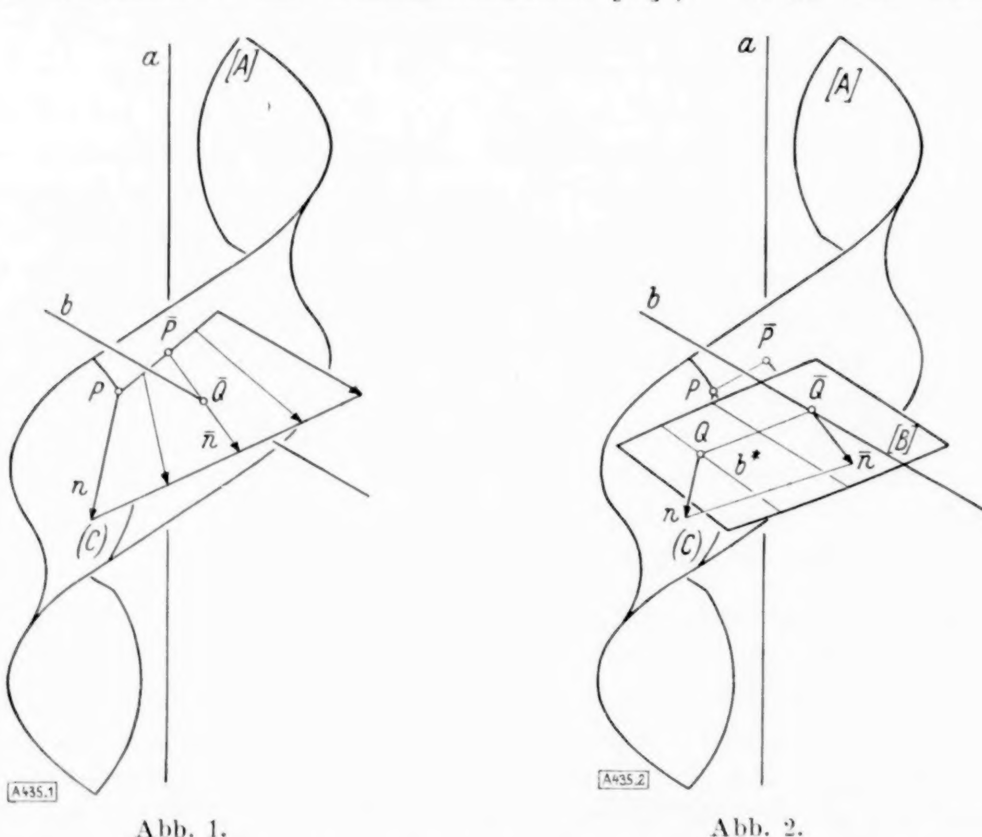


Abb. 1. Abb. 2.

Bahnschraubenlinie des Punktes P verschraubt, so kommt sie auch in eine Lage $\bar{n}$, in der sie die Achse b schneidet[3]). Dieser Schnittpunkt sei mit $\bar{Q}$ bezeichnet. Der Fußpunkt $\bar{P}$ der Normalen $\bar{n}$ ist dann nach dem Obigen ein Punkt der Eingriffslinie. Es wäre demnach die durch Verschraubung der Normalen n entstehende Schraubenfläche b mit der Fräserachse zum Schnitt zu bringen. Um weitere Punkte $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, ... der Eingriffslinie zu erhalten, müßte man jeweils die durch Verschraubung der zugehörigen Normalen n_1, n_2, ... entstehenden Schraubenflächen mit der Achse b schneiden.

[1]) Lösungen für das analoge Problem bei Zylinderflächen, Drehflächen und, falls die Fräserachse b der Schraubenachse a parallel ist, bei Schraubenflächen hat S. Finsterwalder in seinen Vorlesungen über Darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule München angegeben. Dadurch wurde ich zur Behandlung der gestellten Frage angeregt.

[2]) Die Normale n wird als Lot im Punkt P auf die Tangentialebene der Schraubenfläche $[A]$ gefunden. Die Tangentialebene in P ist bestimmt durch die Tangente an die Kurve (C) in P und die Tangente an die durch P gehende Bahnschraubenlinie.

[3]) Man wählt, falls verschiedene solche Lagen existieren, zweckmäßig diejenige, die der Ausgangslage am nächsten ist. Falls keine solche Lage existiert — das kann in Ausnahmefällen vorkommen —, kann bei der gegebenen Lage der Achse b kein Fräser die ganze Schraubenfläche erzeugen.

3. Konstruktionsprinzip (vgl. Abb. 2). Die obige Konstruktion der Eingriffslinie läßt sich noch sehr weitgehend vereinfachen: Anstatt die Schnittpunkte der Achse b mit den durch Verschraubung der einzelnen Normalen n_1, n_2, ... entstehenden Schraubenflächen aufzusuchen, kann man ebensogut die Schnitte der Normalen n_1, n_2, ... mit der durch Verschraubung der Achse b entstehenden Regelschraubenfläche $[B]$ (Schraubungsachse a, Ganghöhe h) aufsuchen. Die Normale n schneide diese Schraubenfläche $[B]$ in einem Punkt Q. Durch diesen Punkt Q geht dann eine Gerade b^* der durch Verschraubung von b entstandenen Schraubenfläche $[B]$. Man schraubt nun die Gerade b^* so weit zurück, bis sie wieder mit b zusammenfällt. Übt man dieselbe Schraubung auf den Punkt P und die Normale n aus, so gelangen sie in die gesuchte Lage $\bar{P}$, $\bar{n}$. Diese Abänderung der Konstruktion hat die vereinfachende Folge, daß man die Normalen n_1, n_2, ... mit der einzigen Schraubenfläche $[B]$ zu schneiden hat, um die gesuchten Punkte $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, ... der Eingriffslinie zu finden.

4. Praktische Ausführung der Konstruktion. Die praktische Ausführung der Konstruktion gestaltet sich zweckmäßig folgendermaßen: Es wird passend die Grundrißtafel senkrecht zur Schraubenachse a, die Aufrißtafel parallel zur Fräserachse b angenommen. Dann graduiert man die Normale n, d. h. man teilt ausgehend von einer beliebigen zur Grundrißtafel parallelen Ebene ε die Ganghöhe h in eine gewisse Anzahl ν von gleichen Teilen und sucht diejenigen Punkte der Geraden n auf, deren jeweilige Höhen über ε $0, \pm\frac{h}{\nu}, \pm 2\frac{h}{\nu}, \ldots$ sind. Dazu ist es zweckmäßig, die Aufrisse einer Reihe von zur Grundrißtafel parallelen Ebenen zu zeichnen, die von ε die Abstände $\pm\frac{h}{\nu}, \pm 2\frac{h}{\nu}, \ldots$ besitzen, dann deren Schnittpunkte mit n''[4]) zu ermitteln und hieraus die Grundrisse der Schnittpunkte auf n' zu finden. Die so gefundenen Punkte seien durch ihre Höhenmarken bezeichnet. Man konstruiert nun den Schnitt der durch Verschraubung der Achse b entstehenden Schraubenfläche $[B]$ mit der Ebene ε (Querschnitt einer Regelschraubenfläche). Durch den Grundriß a' der Schraubenachse a und den Grundriß des Schnittpunktes von b mit ε zieht man eine von a' ausgehende Halbgerade g und teilt den Vollwinkel mit dem Scheitel a' von g ausgehend in ν gleiche Teile und schreibt zu den einzelnen Halbstrahlen den mit g eingeschlossenen Winkel: $0, \pm\frac{2\pi}{\nu}, \pm 2\frac{2\pi}{\nu}, \ldots$. Dabei ist, je nachdem die vorliegende Schraubenfläche rechts- oder linksgängig ist, der Winkel von g aus im Zeigersinn oder Gegenzeigersinn positiv zu zählen. Die Schnittkurve samt Winkelteilung und Bezifferung überträgt man auf Pauspapier. Die horizontalen Querschnitte der durch Schraubung von b entstehenden Schraubenfläche $[B]$ sind kongruent, und man erhält den Querschnitt mit der horizontalen Ebene, die von ε den Abstand $\frac{h}{d}$ hat, indem man die Pause so lange um a' dreht, bis der Halbstrahl mit der Marke $\frac{2\pi}{d}$ auf den Strahl mit der Marke 0 zu liegen kommt. Um nun den Schnitt der Geraden n mit der Schraubenfläche $[B]$ zu erhalten, dreht man die Pause so lange, bis der Schnitt von n' mit der gedrehten Schnittkurve die gleiche Marke (Faktor von h, bzw. 2π) zeigt, wie der über g (Marke 0) liegende Halbstrahl. (Dies kann durch Interpolation rasch und mit genügender Genauigkeit erreicht werden.) Dieser Schnittpunkt ist nach dem Obigen der Punkt Q'. Man dreht jetzt den Punkt Q' zurück, bis er auf b zu liegen kommt, und erhält damit den Punkt $\bar{Q}'$[5]). Desgleichen dreht man den Punkt P' um den Winkel $Q'\,a'\,\bar{Q}'$ zurück und erhält den Grundriß $\bar{P}'$ des gesuchten Punktes $\bar{P}$ der Eingriffslinie. Nach bekannten Methoden kann nun der Aufriß der Eingriffslinie und aus den beiden Rissen der Eingriffslinie der Meridian des Fräsers punktweise konstruiert werden. Da $\bar{Q}\bar{P}$ auch Normale des Fräsers ist, kann man in jedem konstruierten Punkt des Fräsermeridians dazu noch dessen Tangente angeben[6]).

Ist speziell die Fräserachse b parallel zur Schraubenachse a, so wird die Schraubenfläche $[B]$ zu einem Drehzylinder, dessen Schnittpunkte mit den Normalen n_1, n_2, ... sofort konstruiert werden können. Die weitere Konstruktion verläuft dann wie oben.

[4]) Grundrisse sind durch einen Strich, Aufrisse durch zwei Striche bezeichnet.

[5]) Durch den achsennächsten Punkt des Querschnitts werden die Punkte des Querschnitts in zwei Klassen geteilt. Die Erzeugenden der Schraubenfläche $[B]$ durch die Punkte der ersten Klasse treffen die Kehlschraubenlinie von $[B]$ unterhalb, die durch die Punkte der zweiten Klasse oberhalb der Querschnittebene. Je nachdem Q zur ersten oder zur zweiten Klasse gehört, muß auch $\bar{Q}$ auf b unterhalb oder oberhalb des Treffpunkts von b mit der Kehlschraubenlinie liegen. Dadurch ist $\bar{Q}$ eindeutig bestimmt.

[6]) Man wird durch Wahl einer geeigneten Lage der Achse b zu der zu fräsenden Schraubenfläche $[A]$ eine möglichst günstige Form der Eingriffslinie zu erreichen suchen. Es kann unter Umständen eintreten, daß der Fräsermeridian sowohl Selbstüberschneidungen als auch Spitzen aufweist.

B. Durchführung der Konstruktion des Fräsers an einem Beispiel.

Zur Erläuterung der Konstruktion wurde als Beispiel für die Schraubenfläche [A] ein Spiralbohrer gewählt. Die beiden Aufnahmen (Abb. 3a, b) zeigen den Spiralbohrer und ein

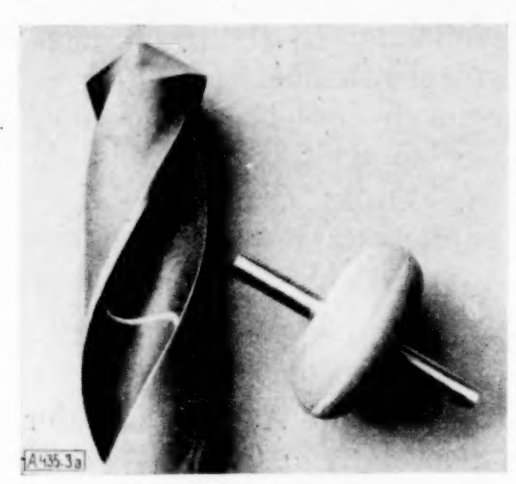


Abb. 3a.

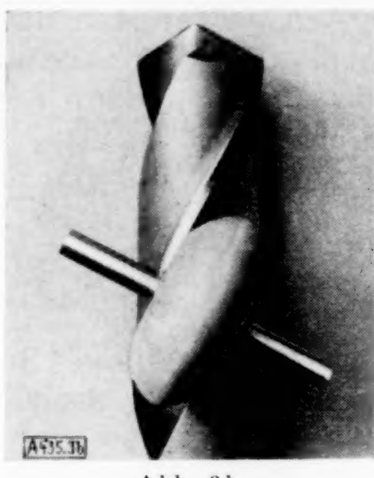


Abb. 3b.

Holzmodell des Fräsers. In Abb. 3a ist die Eingriffslinie in die Bohrernut weiß eingezeichnet. Abb. 3b zeigt den Fräser im Eingriff.

In Abb. 4 ist die Konstruktion eines Punktes der Eingriffslinie durchgeführt. Im Grundriß ist der Querschnitt des Bohrers (Maßstab 1:2,5) mit der horizontalen Ebene, die den kürzesten Abstand der Schraubenachse a und der Fräserachse b enthält, gezeichnet. Der Aufriß dieser Ebene ist mit 0 bezeichnet. Sie spielt die Rolle der Ebene ε (vgl. oben!). Zur Konstruktion verwendet man als erzeugende Kurve (C) für einen Teil der Schraubenfläche zweckmäßig die Schneidkante des Bohrers. In der Abb. 4 wurde die Schneidkante in den Punkt P des Querschnitts geschraubt und ihre Verlängerung in dieser Lage mit s bezeichnet. Zur Konstruktion der Normalen n der Schraubenfläche [A] im Punkt P verschiebt man sowohl die Tangente an die Bahnschraubenlinie in P als auch die Tangente an die Kurve (C) in P — diese fällt hier mit s zusammen — parallel, bis beide Gerade durch die Spitze S des Richtungskegels gehen (der Abstand des Punktes S von der Ebene 0 ist $h/2\pi$). Diese beiden Geraden durch S bestimmen dann eine Ebene, die parallel zur Tangentialebene des Punktes P ist. Man sucht die Spurparallelen dieser Ebene auf und konstruiert in bekannter Weise die Normale n. Ein Teil des Querschnitts der Schraubenfläche [B] mit der Ebene 0 ist in der Abbildung mit den zugehörigen Marken eingetragen. Der Faktor $2\pi/16$ ist bei den Querschnittmarken weggelassen. Die Aufrisse der Ebenen mit den Abständen $\pm\frac{h}{16}$, $\pm 2\frac{h}{16}$, $\pm 3\frac{h}{16}$ von der Ebene 0 sind eingezeichnet. Der Faktor $h/16$ ist bei den Höhenmarken ebenfalls weggelassen. Im Grundriß ist die Lage des gedrehten Querschnitts der Schraubenfläche [B], der den zu P gehörigen Punkt Q liefert mit den zugehörigen Marken gestrichelt eingezeichnet. Durch Drehung erhält man in der oben angegebenen Weise aus den Punkten P' und Q' die Punkte $\bar{P}'$ und $\bar{Q}'$ und aus P', P'' und $\bar{P}'$ den Punkt $\bar{P}''$. Die wahre Gestalt des Fräsermeridians ist der Umriß des Fräsers im Aufriß. Den zu $\bar{P}$ gehörigen Umrißpunkt P_0 bestimmt man, indem man die Ebene ($\bar{P}\,b$) um b dreht, bis sie parallel zur Aufrißtafel ist. Bei dieser Drehung kommt der Punkt $\bar{P}$ in die Lage P_0. Die Senkrechte auf $P_0\bar{Q}''$ in P_0 ist die Tangente des Meridians in P_0. Um weitere Punkte der Eingriffslinie zu finden, wurden außer der verschraubten Schneidkante noch Punkte des Querschnitts benützt. Die Risse der sich so ergebenden Eingriffslinie sind punktiert eingezeichnet, der Fräsermeridian ist durchgezogen [7]). 435

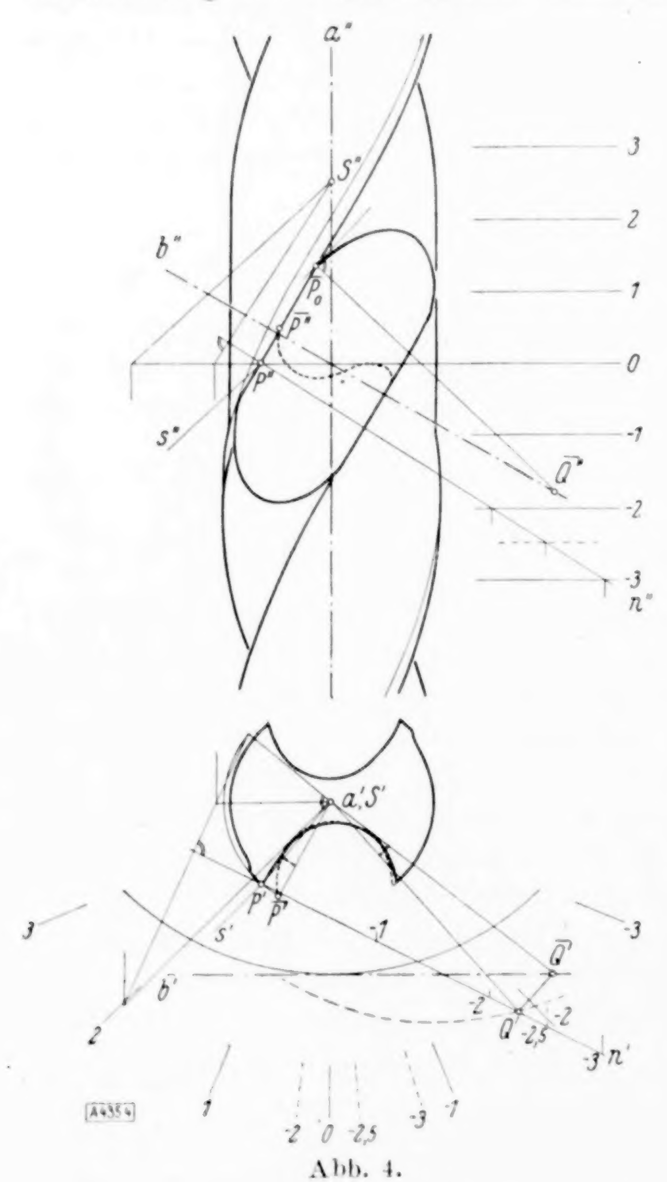


Abb. 4.

[7]) Da die Aufnahmen aus verhältnismäßig geringer Entfernung erfolgten, scheint bei Abb. 3b infolge der perspektivischen Verzerrung der Fräser zu weit über die Bohrernut herauszuragen. Dies ist jedoch nicht der Fall, wovon man sich durch Abb. 4 überzeugen kann.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zum Landestoß von Seeflugzeugen. In einer inhaltreichen Arbeit über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten (diese Zeitschrift Bd. 12, S. 193, 1932 bzw. auch Verhandl. d. 3. intern. Kongresses f. techn. Mechanik Bd. 1, S. 215, 1930 und Zs. f. Flugtechnik u. Motorluftsch. Bd. 22, S. 1, 1931) behandelt H. Wagner an hervorragender Stelle den Landestoß von Seeflugzeugen (diese Zeitschrift l. c., S. 205). Zu der Integralgleichung, die nach H. Wagner die entscheidende Rolle für dies Problem spielt, möchte ich die folgende Bemerkung machen.

In den Bezeichnungen der angeführten Arbeit ist $\eta_b(x)$ die Gleichung des Bodens des Schwimmers, der als zylindrischer Körper behandelt wird. Der Anfangspunkt des Koordinatensystems ist dabei in den tiefsten Punkt des symmetrischen, gekielten Schwimmerbodens gelegt; x ist die horizontale Entfernung (parallel der ursprünglichen Wasseroberfläche vor dem Eintauchen des Schwimmers), η_b ist die vertikale Entfernung von diesem Punkt. V sei die vertikale Eintauchgeschwindigkeit des Schwimmers, die im allgemeinen von der Zeit t abhängig ist. c ist die halbe Breite der in einem bestimmten Augenblick gerade benetzten Fläche des Schwimmers, $\frac{dc}{dt}$ also die halbe Verbreiterungsgeschwindigkeit der Aufschlagfläche. Dann ist mit $u = \frac{V}{\frac{dc}{dt}}$:

$$\eta_b(x) = \int_0^x \frac{u(c)\,dc}{\sqrt{1-\frac{c^2}{x^2}}}.$$

Wenn man $u(c)$ aus dieser Volterraschen Integralgleichung erster Art ermittelt hat, so kann man, wie H. Wagner gezeigt hat, alles Weitere, insbesondere die Kraft auf den Schwimmerboden, leicht ausrechnen.

H. Wagner gibt nun die Lösung dieser grundlegenden Integralgleichung in dem Spezialfall an, daß $\eta_b(x)$ in Form eines Polynoms in x gegeben ist, wobei dann $u(c)$ ebenfalls ein Polynom wird, dessen Koeffizienten durch Einführen eines entsprechenden Ansatzes in die Integralgleichung bestimmt werden (l. c. Gl. (36a) (36b)). Wenn die Kenntnis einer solchen Lösung praktisch auch oft genügen wird, so wird trotzdem eine allgemeine Lösung nicht ohne Interesse sein.

Die vorliegende Integralgleichung ist nahe verwandt mit der Abelschen Integralgleichung, so daß sich ihre allgemeine Lösung tatsächlich leicht angeben läßt (cf. Frank-v. Mises: Die Differential- u. Integralgleichungen d. Mechanik u. Physik, Bd. 1, S. 484, Braunschweig 1930). Es ergibt sich

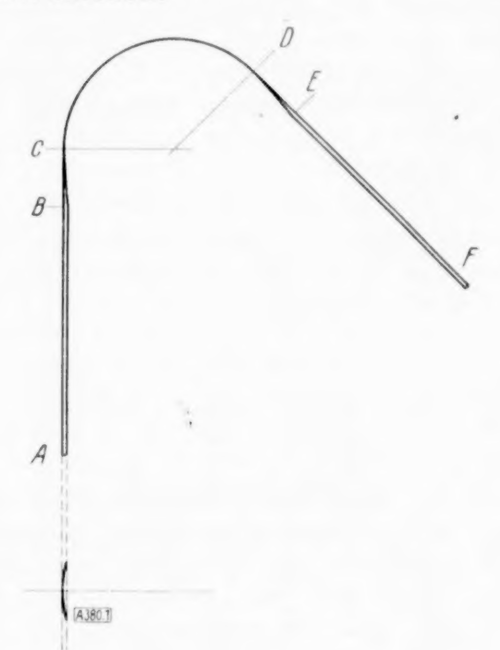
$$u(c) = \frac{2}{\pi}\left\{\operatorname{tg}\alpha_0 + c\int_0^c \frac{d}{dx}\left[\frac{\eta_b(x)}{x}\right]\frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}}\right\},$$

α_0 ist dabei der Winkel des Schwimmerbodens gegen die x-Achse im Punkte $x=0$. Im Falle eines geradlinig gekielten Bodens ist übrigens $\frac{\eta_b}{x} = \text{const} = \operatorname{tg}\alpha_0$, so daß dann in der obigen Lösung das Integral wegfällt.

Von Praktikern ist mir erklärt worden, daß recht komplizierte Bodenformen $\eta_b(x)$ aus konstruktiven Gründen in Betracht kommen könnten, so daß die größere rechnerische Bewegungsmöglichkeit, die durch die Lösung für beliebige $\eta_b(x)$ gegeben ist, für die Ausnutzung der Wagnerschen Theorie willkommen sein dürfte.

Göttingen. W. Tollmien. 364

Über die durch Krümmung steifgemachten Meßbänder. Sucht man ein derartiges Meßband umzubiegen, so wie es in der beistehenden Abb. angedeutet ist, so kann man am Meßband deutlich fünf verschieden geformte Teile wahrnehmen. In den Teilen AB und EF bleibt die Krümmung des Querschnittes erhalten, und diese Teile nehmen offenbar fast gar keine Deformationsenergie auf. Die Stücke BC und DE stellen „Übergangsstücke" dar, und im Stück CD ist die Krümmung im Querschnitt vollkommen verschwunden, dagegen tritt in diesem Stück und im wesentlichen nur in diesem Stück eine Krümmung des Längsschnittes auf. Diese Tatsache müßte man bei einer ausführlichen Behandlung des Gegenstandes, etwa aus dem Minimumprinzip der Formänderungsarbeit mathematisch erschließen, doch erscheint sie auch durch oberflächliche Betrachtungen in dieser Richtung plausibel. Im Stück CD ist nun der Krümmungsradius annähernd konstant und annähernd gleich dem Krümmungsradius des Querschnittes im ursprünglichen Zustand. Den Grund hierfür kann man sich durch folgende kleine Überlegung klarmachen.



Nehmen wir an, die Deformationsenergie der Stücke AB und EF sei gleich Null und die Deformationsenergie der Übergangsstücke BC und DE sei unabhängig von dem Winkel α, den die Stücke AB und EF miteinander einschließen. Die Deformationsenergie des Stückes CD kann man sich aus zwei Bestandteilen zusammengesetzt denken.

1. Aus der Aufbiegarbeit A_I, d. h. der Energie, die notwendig ist, um die Krümmung des Querschnittes rückgängig zu machen. Dieser Bestandteil ist offenbar proportional der Länge dieses Stückes.

2. Aus der Umbiegarbeit A_{II}, d. h. der Energie, die notwendig ist, um die Krümmung im flachen Band (bei dem man sich die Krümmung in der Querrichtung bereits rückgängig gemacht zu denken hat) in der Längsrichtung zu bewirken. Bedeutet R_I den Krümmungsradius des Querschnittes im ursprünglichen Zustand und R_{II} den Krümmungsradius im Längsschnitt von CD, $\varkappa$ und μ zwei ortsunabhängige Größen, und bedeutet φ den Winkel, den die Tangente in einem beliebigen Punkt, der die Mittellinie des Stückes CD mit der Mittellinie des Stückes AB einschließt, so ergibt sich für das Bogenelement im CD

$$ds = R_{II}\,d\varphi,$$

und es ergeben sich für A_I und A_{II} Ausdrücke von der Form

$$A_{\mathrm{I}} = \varkappa \int d s = \varkappa \int_0^\alpha R_{\mathrm{II}} \, d \varphi ,$$

$$A_{\mathrm{II}} = \int \frac{\mu}{R_{\mathrm{II}}^2} \, d s = \mu \int_0^\alpha \frac{d \varphi}{R_{\mathrm{II}}} .$$

Dann folgt aus

$$A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} \to \mathrm{Min} ,$$

daß R_{II} konstant sein muß, ferner durch Differentiation nach R_{II}, daß $A_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{II}}$ sein muß. Stellt man nun die Ausdrücke für die Aufbiegarbeit und die Umbiegarbeit durch Doppelintegrale dar, so geht der eine aus dem anderen hervor, indem man R_{I} und R_{II} vertauscht. Aus der Gleichheit von A_{I} und A_{II} kann man somit auf die Gleichheit von R_{I} und R_{II} schließen.

Prag. P. Funk. 380

Ein ebenes Diagramm für ternäre Gemische. Ein ebenes Diagramm zur Darstellung der Zustandskurven ternärer Gemische. Anwendung auf die Entropievermehrung beim idealen ternären Gemisch. Konstruktion dieses Diagrammes. Bestimmung des Höchstwertes. Beziehung zwischen Entropievermehrung und theoretischer Trennungsarbeit bei Gasgemischen. Benutzung des Diagrammes zur Ermittlung der Trennungsarbeit.

An anderer Stelle[1]) wurde ein ebenes Diagramm zur Darstellung der Gleichgewichtsisobaren und Gleichgewichtsisothermen von ternären Gemischen entwickelt und seine Anwendung am Flüssigkeits-Dampfgemisch Sauerstoff-Stickstoff-Argon gezeigt. Im nachfolgenden wird die Verwendung eines solchen Diagrammes zur Darstellung von Zustandskurven ternärer Gemische am Beispiel der Entropievermehrung im idealen ternären Gemisch erläutert.

Es seien a, b, c drei Stoffe, die sämtlich entweder im dampfförmigen, flüssigen oder festen Zustand sind. $\mathfrak{e}$ sei die Entropievermehrung je Mol des Gemisches. Sind ferner z_a, z_b, z_c die Mol- bzw. Volumenkonzentrationen, so ist

$$\mathfrak{e} = -1{,}985\,(z_a \ln z_a + z_b \ln z_b + z_c \ln z_c) \quad . \quad (1),$$

und bei Einführung der Briggschen Logarithmen

$$\mathfrak{e} = -4{,}5655\,(z_a \lg z_a + z_b \lg z_b + z_c \lg z_c) \quad (2),$$

wobei

$$z_a + z_b + z_c = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

gilt.

Auf Grund von (3) können wir die $\mathfrak{e}$ als Ordinaten in einem ebenen Diagramm mit zwei Ordinatenachsen darstellen, die den Abstand 1 voneinander haben, und dessen Abszissen die drei Konzentrationen z_a, z_b und z_c sind. Zur Vereinfachung wählen wir als Ordinaten $\frac{\mathfrak{e}}{4{,}5655}$.

Wir setzen nun in (2) z_a konstant und schreiben daher

$$\mathfrak{e} = -4{,}5655\,(k + z_b \lg z_b + z_c \lg z_c) \quad . \quad (4).$$

Für k wählen wir der Reihe nach $z_a = 0$, 0, 1, 0, 2 usw. und erhalten damit aus (4) die in Abb. 1 dargestellte Kurvenschar. Diese ist nach unten durch die gestrichelt gezeichnete Kurve 0 C 1 begrenzt, die die Entropievermehrung $\mathfrak{e}_{bc}$ des binären Gemisches der Stoffe b und c bestimmt. Sie ist durch die Gleichung

$$\mathfrak{e}_{bc} = -4{,}5655\,(z_b \lg z_b + z_c \lg z_c) \quad . \; . \; . \quad (5)$$

gegeben. Die weitere Begrenzung der Kurvenschar erfolgt durch das Ordinatenstück 1 A, dessen Länge nach (5) gleich $-\lg 0{,}5$ ist, entsprechend dem Höchstwert der Entropievermehrung beim binären Gemisch, und durch die gestrichelt gezeichnete Einhüllende der Kurvenschar.

Ziehen wir die Gerade 0 A, dann wird $BC = DE$, so daß die Ordinatenstücke, die durch die Einhüllende und die Gerade 0 A begrenzt sind, ebenfalls die Entropievermehrung beim binären Gemisch ergeben.

Wie aus Gl. (2) folgt, liegen die Schnittpunkte C, G und F je zweier Kurven der Schar mit dem Berührungspunkt E der Einhüllenden auf einer gemeinsamen Ordinate. Daraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der Kurvenschar, sobald die ersten Kurven aus (2) berechnet sind.

Aus dem Diagramm der Abb. 1 lesen wir z. B. mit $z_a = 0{,}2$, $z_b = 0{,}4$ und $z_c = 0{,}4$ für den zugehörigen Punkt F die Entropievermehrung $\mathfrak{e} = 4{,}5655 \cdot 0{,}458 = 2{,}09$ ab. Denselben Wert $\mathfrak{e}$ erhalten wir auch für $z_a = 0{,}4$, $z_b = 0{,}2$ und $z_c = 0{,}4$.

Für den Höchstwert der Entropievermehrung beim ternären Gemisch gilt

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial z_a}\right)_{z_b} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial z_b}\right)_{z_a} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Damit folgt aus (1) und (3)

$$z_a = z_b = z_c = \frac{1}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

und

$$\mathfrak{e} = 4{,}5655 \lg 3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Das gleiche muß sich auch für den Höchstwert der Einhüllenden ergeben, wie nachfolgend gezeigt wird. Bezeichnen wir die Abszissen der Einhüllenden mit z_a' und z_b', die Ordinaten der Geraden 0 A mit x, und beachten wir, daß 1 $A = \lg 2$ ist, so lautet die Gleichung dieser Geraden

$$x = -z_a' \lg \frac{1}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Daher gilt für die Gleichung der Einhüllenden

$$\mathfrak{e} = -1{,}985\left(z_a' \ln \frac{1}{2} + z_a' \ln z_a' + z_b' \ln z_b'\right) \quad (10).$$

Daraus erhalten wir für den Höchstwert von $\mathfrak{e}$

$$\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial z_a} = \ln \frac{1}{2} + \ln z_a' - \ln z_b' = 0 \quad . \; . \quad (11).$$

Mithin wird

$$\frac{1 - z_a'}{z_a'} = \frac{1}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

und

$$z_a' = \frac{2}{3}, \qquad z_b' = \frac{1}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Führen wir (13) in (10) ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{e} = 4{,}5655 \lg 3$$

in Übereinstimmung mit (8).

Während die Entropievermehrung je Mol des idealen Gemisches für sämtliche Stoffe gleich wird, ist dies für die Entropievermehrung je Masseneinheit nicht der Fall. Bezeichnen wir diese mit $\mathfrak{e}$, das Mol eines Gemisches mit m und die Mole-

[1]) V. Fischer: Ann. d. Phys. 17 (1933), 421.

kulargewichte seiner drei Bestandteile mit m_a, m_b und m_c, so wird

$$m = m_a z_a + m_b z_b + m_c z_c \quad . \quad . \quad (14),$$

und es gilt für verschiedene Gemische mit den Molekulargewichten m, m', m'' usw.

$$\bar{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}\, m = \mathfrak{e}'\, m' = \mathfrak{e}''\, m'' = \quad . \quad . \quad (15).$$

Das Gemisch bestehe z. B. aus Argon, Sauerstoff und Stickstoff, und wir wollen für die Zusammensetzung $z_a = 0{,}2$, $z_o = 0{,}4$ und $z_n = 0{,}4$ aus dem Diagramm Abb. 1 die Entropievermehrung bestimmen. Es ist jetzt $m_a = 40$, $m_o = 32$ und $m_n = 28$. Damit folgt aus (14) $m = 32$. Zu der

Unter Einführung des mechanischen Wärmeäquivalentes A folgt aus (17) für die Trennungsarbeit $\bar{\mathfrak{a}}$ je Mol

$$A\,\bar{\mathfrak{a}} = A\, m\, \mathfrak{a} = -1{,}985\, T\, (z_a \ln z_a + z_b \ln z_b + z_c \ln z_c) \quad (18).$$

Nach (1) ergibt sich daraus

$$A\,\bar{\mathfrak{a}} = T\,\bar{\mathfrak{e}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

und

$$A\,\mathfrak{a} = T\,\mathfrak{e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

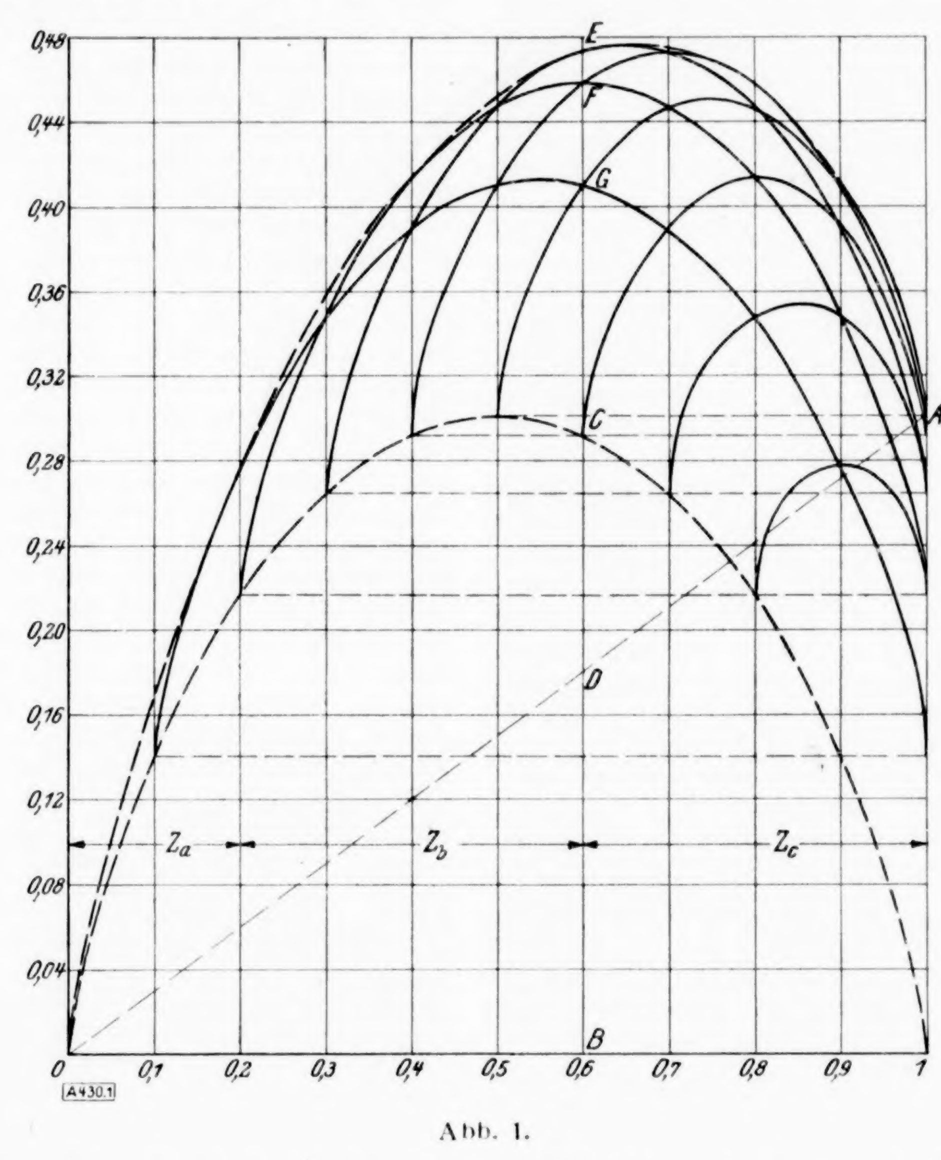


Abb. 1.

obigen Zusammensetzung des Gemisches haben wir bereits aus dem Punkt F des Diagrammes $\bar{\mathfrak{e}} = 2{,}09$ ermittelt. Aus (15) erhalten wir nun $\mathfrak{e} = \frac{2{,}09}{32} = 0{,}0653$.

Unter der theoretischen Arbeit zur Trennung eines Gasgemisches in seine Bestandteile versteht man bekanntlich jene Arbeit, die notwendig ist, um die einzelnen Bestandteile von ihrem Teildruck im Gemisch isothermisch auf den Druck zu verdichten, unter dem das Gasgemisch steht.

Bezeichnen wir die Teildrücke in einem ternären Gasgemisch, das unter dem Druck p steht, mit p_a, p_b und p_c, den spezifischen Rauminhalt des Gemisches mit v und seine Teilvolumina mit v_a, v_b und v_c, sowie die Trennungsarbeit je Masseneinheit mit $\mathfrak{a}$, dann wird demnach

$$\mathfrak{a} = p\, v \left(\frac{v_a}{v} \ln \frac{p}{p_a} + \frac{v_b}{v} \ln \frac{p}{p_b} + \frac{v_c}{v} \ln \frac{p}{p_c}\right) \quad . \quad (16).$$

Bezeichnen wir ferner die Gaskonstante des Gemisches mit R, seine absolute Temperatur mit T und beachten, daß $\frac{v_a}{v} = \frac{p_a}{p} = z_a$ usw. ist, so können wir (16) auch schreiben

$$\mathfrak{a} = -R\, T\, (z_a \ln z_a + z_b \ln z_b + z_c \ln z_c) \quad . \quad (17).$$

Wir können also auch die theoretische Arbeit zur Trennung eines ternären Gasgemisches aus dem Diagramm Abb. 1 bestimmen. Sei z. B. für ein $A_r - O - N$ Gemisch die Zusammensetzung wieder $z_a = 0{,}2$, $z_o = 0{,}4$, $z_n = 0{,}4$ und die Temperatur $T = 288^0$ abs, dann wird nach (20)

$$\mathfrak{a} = 427 \cdot 288 \cdot 0{,}0653 = 8030 \text{ mkg/kg},$$

das sind, falls in einer Stunde 1 kg des Gemisches zerlegt werden soll, 0,0297 PS.

Zusammenfassung. Aus der Bedingung, daß die Summe der drei Konzentrationen eines ternären Gemisches gleich 1 ist, ergibt sich die Möglichkeit, die Zustandskurven ternärer Gemische in einem ebenen, orthogonalen Koordinatensystem darzustellen. Es wird als Beispiel die Kurvenschar ermittelt, durch die die Entropievermehrung beim idealen ternären Gemisch in dem neuen Diagramm dargestellt ist. Ferner wird eine Gleichung abgeleitet, die den Zusammenhang zwischen Entropievermehrung und theoretischer Trennungsarbeit ergibt, so daß das erhaltene Diagramm auch die letztere abzulesen gestattet.

Berlin. V. Fischer. 430

BUCHBESPRECHUNGEN

FELIX **KLEIN,** Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, gehalten a. d. Univ. Göttingen im WS. 1893/94. Ausgearbeitet von Ernst RITTER, herausgeg. u. m. Anm. versehen von Otto HAUPT, Prof. d. Math. a. d. Univ. Erlangen. (Bd. 39 d. „Grundlehren der mathemat. Wissenschaften", herausgeg. v. R. Courant.) IX + 344 S. m. 96 Fig. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis geb. 23,60 RM.

Die vorliegende Vorlesung hat Klein im Winter 1893/94 vor einer geringen Zahl von Hörern gehalten. War doch auch in Göttingen in jenen Jahren die Zahl der Mathematikstudierenden sehr zurückgegangen. Die Hörer waren überwiegend damals Ausländer, unter ihnen zum ersten Male auch zwei Studentinnen der Mathematik, deren Dissertationen übrigens aus dieser Vorlesung erwachsen sind. Für den Referenten war es die erste Vorlesung, die er bei Klein gehört hat. Um es gleich vorauszunehmen: Die Absicht des Herausgebers, möglichst den persönlichen Kleinschen Stil zu wahren, ist sehr gut gelungen. Das soll um so mehr hervorgehoben werden, als der Herausgeber bei Klein selbst nie eine Vorlesung gehört hat. Referent sah beim Lesen unwillkürlich Klein vor sich auf dem Katheder stehend, mit dem Folioblatt in der Hand, auf dem der Gedankengang jeder Vorlesung sorgfältig disponiert war. Es steigt aber auch die Erinnerung an den genialen Assistenten Kleins auf, der die Vorlesung damals ausgearbeitet hat: Ernst Ritter, der noch nicht zwei Jahre später (September 1895) im Hafen von New York einem schweren Typhus zum Opfer fiel, der ihn auf der Fahrt nach Amerika, wohin er als Professor berufen war, befallen hatte. Bei einer neuen Auflage der gedruckten Ausgabe möchte im Vorwort doch auch Ernst Ritters gedacht werden unter Hinweis auf den Nachruf, den Klein seinem Schüler gewidmet hat. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band IV, Seite 52—54; versehentlich ist dort bei der Jahresangabe ein Druckfehler stehengeblieben: es muß 1895, nicht 1885 heißen.)

Absicht der Kleinschen Vorlesung war es, eine große Funktionsgattung, die in der damaligen Zeit nicht hinreichend allgemein studiert war, im Gegensatz z. B. zu den elliptischen Funktionen und deren Verallgemeinerungen, zur Geltung zu bringen unter besonderer Anlehnung an die große Arbeit Riemanns über diese Funktionen. Mit der Analyse der Riemannschen Arbeit beschäftigt sich der erste Teil der Vorlesungen, wobei die hypergeometrische Funktion, die Riemannsche P-Funktion, als Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung erscheint. Der Ausdruck hypergeometrisch kommt zuerst bei Wallis vor für eine Reihe, deren Bildungsgesetz allgemeiner ist als das der geometrischen Reihe. In dem wertvollen, bis auf die neueste Zeit ergänzten Literaturverzeichnis hätte Wallis vielleicht auch mit einem genauen Zitat bedacht werden können[1]).

Die Reihe

$$F(a,b;c;x) = 1 + \frac{a\,b}{1\cdot c}\,x + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c\,(c+1)}\,x^2 + \cdots$$

hat Euler zuerst als eine Funktion von x betrachtet.

Der im Literaturverzeichnis S. 307 genannte Band der Opera Omnia, Serie I, Band 16, ist inzwischen auch erschienen. Klein faßt den Begriff etwas weiter und versteht unter einer hypergeometrischen Funktion

$$C\,x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\cdot F(a,b;c;x),$$

wo α und γ zunächst reelle Zahlen sind. In der geschichtlichen Entwicklung wird Pfaff genannt, der bedeutende Helmstedter Mathematiker, bei dem Gauß mehrere Monate gewohnt und bei dem er auch promoviert hat. Bei der Nennung von Pfaff kann die wortgetreue Fassung der jetzigen Druckausgabe für jüngere historisch nicht genügend orientierte Leser vielleicht irreführen: statt zu sagen „Ende des vorigen Jahrhunderts", was für 1893 paßte, möchte man jetzt lieber sagen: „Ende oder richtiger aus der Wende des 18. Jahrhunderts"; ist doch Pfaff, der 1810 nach der Aufhebung der Universität Helmstedt als Ordinarius nach Halle gekommen ist, dort 1825 gestorben. Wegen der von Klein angeregten Frage, die näheren Beziehungen der Arbeit Pfaffs zu der späteren großen Arbeit von Gauß zu untersuchen, könnte auf Schlesinger verwiesen werden: Über Gauß' Arbeiten zur Funktionen-Theorie. Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß 1912, S. 35. Freilich fehlt auch heute noch die in Aussicht gestellte genauere Darstellung des wissenschaftlichen Verhältnisses der beiden Männer.

Der zweite Teil behandelt die durch den Quotienten zweier Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung gelieferte konforme Abbildung. Dieser Quotient genügt einer Gleichung dritter Ordnung. Es ergeben sich Beziehungen zu der Riccatischen Differentialgleichung zu den Besselschen Funktionen und anderen. Eingeschoben wird ein Ausblick auf Lies Auffassung. Zum Studium des Quotienten dient eine Darstellung auf der komplexen Kugel, und so ergibt sich als Hilfsmittel die sphärische Trigonometrie; sie wird durch die Namen Gauß, Möbius, Study charakterisiert. Dieser Abschnitt wendet sich dann zu den Ergebnissen von F. Schilling, durch die die Formeln der sphärischen Trigonometrie für komplexe Werte der Veränderlichen geometrisch erläutert werden. In der Vorlesung selbst konnte Klein nur auf die bevorstehenden Untersuchungsergebnisse Schillings hinweisen, die damals noch nicht abgeschlossen waren.

Wenn mit Rückicht auf den zur Verfügung stehenden Raum hier nur stichwortartig Gruppentheorie, Algebra mit besonderer Rücksicht aufs Ikosaeder, Nichteuklidische Geometrie, Gedankenkreis von Piccard-Vessiot aufgezählt werden, so muß das genügen, einen Einblick in den reichen Gedankeninhalt der Kleinschen Vorlesung zu geben, die wie jede Kleinsche Vorlesung immer von dem Bestreben geleitet ist, die verschiedenen Gebiete der Mathematik miteinander zu verbinden. Mit Recht sagt der Herausgeber im Vorwort, daß diese Vorlesung eine treffliche Ergänzung und Weiterführung dessen bringt, was der Studierende mitt-

[1]) Joh. Wallis: Arithmetica Infinitorum Opera math. Vol. I (1699) pag. 466, 4. Absatz. In der vom 19. Juli 1655 datierten, für die Geschichte seiner Forschung sehr interessanten ausführlichen Widmung der Arithmetica an den Landpfarrer W. Ougthred (matheseos peritissimum) sagt er, daß er für Reihen, die noch mehr zusammengesetzt sind als geometrische, geglaubt hat, einen neuen Namen einführen zu müssen, um so mehr, da nicht zu hoffen sei, aus solchen Reihen durch „Interpolation" mittlere Glieder als „erklärbare Zahlen" (numeri explicabiles) zu gewinnen; erhält man doch schon bei der gewöhnlichen geometrischen Reihe „unmögliche Zahlen" wie $\sqrt{2}$. Den Ausdruck „hypergeometrisch" nennt er dort aber nicht. Op. math. Vol. I pag. 359. Dagegen erwähnt er ihn ausdrücklich in einem Brief an Leibniz vom 16. Januar 1699: Series quam dico hypergeometricam 1 2 6 24 120 etc., Operum mathematicorum Vol. Tertium (1699) pag. 694. An die gleiche Reihe der Fakultäten knüpft Euler in der nach seinem Tode veröffentlichten Petersburger Akademieabhandlung an: De termino generali serierum hypergeometricarum. Op. omnia Ser. I, 16, S. 140.

lerer Semester an Geometrie und Funktionentheorie kennen gelernt hat. Sehr wertvoll sind auch die 33 Seiten Anmerkungen, durch die der Herausgeber u. a. die seit 1893 erzielten Fortschritte kennzeichnet.

Leipzig, z. Zt. Frankfurt a. M.

W. Lorey.

H. **KAYSER,** Prof. der Physik an der Universität Bonn, und **H. KONEN,** Prof. der Physik an der Universität Bonn, Handbuch der Spectroscopie. 7. Bd. 3. u. letzte Liefg. Leipzig 1934, S. Hirzel Verlag. Umfang des 7. Bandes (enthält 3 Lieferungen) IV + 1473 Seiten. Preis brosch. 132,20 M., geb. 141,— M.

Mit der vorliegenden dritten Lieferung ist der 7. Band des Handbuchs der Spectroscopie von Kayser und Konen abgeschlosssen. Der Gesamtband umfaßt 57 Elemente in alphabetischer Reihenfolge von Argon bis Niobium. Bei der ungeheuren Fülle der spektroskopischen Publikationen der letzten Jahre haben die Verfasser den Anschluß des behandelten Stoffes an die Jetztzeit durch ein Annäherungsverfahren zu erreichen versucht. Die erste Lieferung des 7. Bandes vom Jahre 1923 ist durch die inzwischen erschienene erste Lieferung des 8. Bandes auf den Stand des Jahres 1932 gebracht. Die zweite Lieferung dieses 8. Bandes ist noch für 1934 in Aussicht gestellt, so daß dann in den beiden Bänden 7 und 8 die genannten 57 Elemente so nahe wie möglich an die Gegenwart herangeführt sind. Auch in dem neuen Band ist die bekannte und bewährte Form beibehalten worden. Die spektroskopischen Daten sind so vollständig angeführt, daß gerade auf dieser restlosen Umfassung eines umfangreichen Teilgebiets der Physik die hohe Bedeutung des Handbuchs für die Forschung beruht.

W. **BAUMANN** und R. **MECKE,** Das ultrarote Sonnenspektrum von λ 10000 bis λ 7600 A. E. Leipzig 1934, Johann Ambrosius Barth. 56 S. m. 6 Taf. Preis 12 M.

In sechs ausgezeichnet wiedergegebenen Tafeln ist das ultrarote Sonnenspektrum zwischen 7574 und 8809 A. E. mit einer Dispersion von 0,44 A. E./mm dargestellt. Diese Aufnahmen bilden eine erwünschte Erweiterung des bekannten Rowlandschen Sonnenatlasses, der nur bis 7331 A. E. reicht. In den beigefügten Tabellen, die sich z. T. auf eigene, z. T. auf amerikanische Messungen stützen, sind 3297 Linien zwischen 10000 und 7600 A. E. enthalten, von denen eine große Zahl durch Bandenanalyse wie auch durch direkte Absorptionsversuche dem Wasserdampf und dem Sauerstoff mit Sicherheit zugeschrieben werden können. Diese genaue Durchmusterung dürfte besonders dem Astrophysiker willkommen sein, dessen Interesse durch den kürzlich erfolgten Nachweis des Methans und Ammoniaks in einzelnen Planetenatmosphären gerade auf dieses Gebiet der Absorptionsspektroskopie gelenkt wird.

Berlin. R. Frerichs. 438

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. Dr. phil. R. **POZDĚNA,** Meter und Kilogramm, Entstehung und Sicherung des internationalen metrischen Maßsystems. Mathem.-Phys. Bibl., Reihe 1, Bd. 76. 45 S. m. 15 Fig. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

Dr. Dr.-Ing. GEORG **SCHEFFERS,** o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? Mathem.-Phys. Bibl., Reihe 1, Bd. 85/86. 98 S. m. 12 Taf. u. 27 Abb. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 2,40 M.

Dr.-Ing. FERDINAND **WINTER** VDI., Das Spiel der 30 bunten Würfel. 128 S. m. 31 Fig. u. 27 Tab. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 3,60 M.

R. **BECKER,** o. Professor a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Theorie der Elektrizität. Band I, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. 10. Aufl. 262 S. m. 59 Fig. Leipzig und Berlin 1933, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 14,50 M.

C. **JUEL,** Professor emeritus an der Technischen Hochschule Kopenhagen, Vorlesungen über Projektive Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der v. Staudtschen Imaginärtheorie Band XLII. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. 282 S. m. 87 Fig. Berlin 1934, Verlag Julius Springer. Preis geb. 22,50 M.

MARIO **MEDICI,** Prof. a. d. Technischen Hochschule Padua, Le Machine Idrauliche. Biblioteca Dell'Ingegnere Bd. 3 (Herausg. Prof. G. Albenga). 520 S. m. 325 Fig. Torino 1934 — XII, Unione Tipografico-Editrice Torinese.

F. **ODQVIST,** Dr. phil. Dozent, Stockholm, Plasticitetsteori med Tillämpningar. 80 S. Stockholm 1934, Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag.

Dr.-Ing. O. K. **FRÖHLICH,** Druckverteilung im Baugrunde mit besonderer Berücksichtigung der plastischen Erscheinungen. 183 S. m. 68 Textabb. Wien 1934, Verlag Julius Springer. Preis kart. 15 M.

Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Band 2, 1933—1934. Herausgegeben vom Generalsekretariat in Zürich. 495 S. 1934, Kommissionsverlag A.G. Gebr. Leemann & Co., Zürich. Preis kart. 34,80 Schw. Franken.

NACHRICHTEN

IV. Internationaler Kongreß für angewandte Mechanik.

Vom 3. bis 9. Juli fand in Cambridge der vierte Internationale Kongreß für angewandte Mechanik statt, der sich, wie die früheren Kongresse, eines sehr zahlreichen Besuches der Fachgenossen aus aller Herren Länder erfreute. — Nachdem der internationale Kongreßauschuß bereits am Vormittag des 3. Juli unter dem Vorsitz des Präsidenten, Prof. C. E. Inglis, zu einer Sitzung zusammengetreten war, erfolgte die feierliche Eröffnung des Kongresses durch den Vizekanzler der Universität Cambridge, Herrn J. F. Cameron (M. A. Master of Conville u. Caius College), am Nachmittage im Senatshause der Universität. Die sachlichen Verhandlungen des Kongresses begannen am folgenden Tage, Mittwoch, 4. Juli; sie wurden in Vor- und Nachmittagssitzungen (mit Ausnahme des Sonntags) bis Montag, 9. Juli, durchgeführt. Für die all-

gemeinen Vorträge stand je eine volle, für die Sektionsvorträge einschließlich Diskussion eine halbe Stunde zur Verfügung. Wie schon in Stockholm, so war auch diesmal in den Nachmittagsstunden nach Schluß der Sitzungen Gelegenheit zur Fortführung der Diskussion geboten, soweit ein besonders lebhaftes Interesse an einzelnen Vorträgen dies erwünscht erscheinen ließ. Auf diese Weise wurde die Einhaltung des Programms ermöglicht, ohne daß die Diskussionsmöglichkeiten über Gebühr eingeschränkt wurden.

Die allgemeinen Vorträge, deren Themen im letzten Heft mitgeteilt wurden, erregten naturgemäß das Hauptinteresse, da sie einen Überblick über die Fortschritte auf den gegenwärtig wichtigsten Forschungsgebieten gaben. — Zur Mechanik der Flüssigkeiten gab Kármán einen Überblick über die Entwicklung der Vorstellungen und über den gegenwärtigen Stand der Theorie der turbulenten Strömung, zu der er selbst so wesentliches beigetragen hat. Wagner sprach über das Gleiten von Körpern auf der Wasseroberfläche, wobei er sich gleichfalls auf eigene, frühere und neuere Arbeiten stützen konnte. — Zur Schwingungstheorie sprach Den Hartog in einem außerordentlich anregenden, durch Modellvorführung ergänzten Vortrag, der an sehr interessanten Beispielen einen Überblick über die Fülle der Probleme auf diesem praktisch so wichtigen Gebiete der Ingenieurmechanik bot. — Die Elastizitäts- und Festigkeitslehre kam in 2 der allgemeinen Vorträge zur Geltung. Neben einem anregenden Vortrag von Caquot über grundsätzlich wichtige Fragen der Elastizitätstheorie fesselte der Vortrag von Taylor (Cambridge), der einen neuen und vielversprechenden Ansatz zur Erklärung der Festigkeitseigenschaften der Kristalle gab. — Der praktischen Ingenieurtätigkeit am nächsten stand wohl der Vortrag von Schmidt (Danzig), der über theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Frage des Wärmeüberganges von festen Körpern an flüssige und gasförmige Stoffe berichtete. — Über Rechenmaschinen und mathematische Instrumente sprach Bush (M. I. T. Cambridge U. S. A.). Vom deutschen Standpunkt aus muß auf diesen Vortrag besonders hingewiesen werden, weil es sich hier um ein Gebiet handelt, das mehr Aufmerksamkeit verdient, als ihm in Deutschland gegenwärtig zuteil wird. Es sei erwähnt, daß u. a. eine Maschine zur Lösung von linearen Gleichungen mit 11 Unbekannten vorgeführt wurde.

Über die Einzelvorträge in den Sektionen zu berichten, ist schon deshalb kaum möglich, weil der Referent von den gleichzeitig stattfindenden Vorträgen nur jeweils einen hören konnte. — Leider wird es nicht möglich sein, wie in früheren Jahren einen Kongreßbericht zu drucken, in dem alle Vorträge ausführlich wiedergegeben wurden. Der Verhandlungsbericht wird nur die allgemeinen Vorträge in extenso enthalten, von den Sektionsvorträgen nur kurze Auszüge.

Der internationale Kongreß-Ausschuß hielt seine Schlußsitzung am Sonnabend, dem 7. Juli. An Stelle der Herren v. Kármán und v. Mises, die als Vertreter der U.S.A. und der Türkei dem Ausschuß weiterhin angehören werden, wurden die Herren Grammel und Trefftz als deutsche Vertreter zugewählt, ferner Herr Federhofer für Österreich. — Die Schlußsitzung des Kongresses fand am Montag, dem 9. Juli, nachmittags, statt.

Es braucht wohl nicht besonders gesagt zu werden, daß die Teilnehmer des Kongresses die freundlichsten Erinnerungen an die Cambridger Tagung mitgenommen haben. Neben dem wissenschaftlichen Teil, um den sich die Herren des Organisationsausschusses besonders bemüht haben, verdient der gesellschaftliche Teil, in dem die traditionelle englische Gastlichkeit zur Geltung kam, eine dankbare Erwähnung. Den Herren und Damen des Organisationsausschusses, dem Mayor der Stadt Cambridge und den Masters and Fellows von Christ's College, St. John's College, Trinity College, King's College und Pembroke College ist der dauernde Dank der Teilnehmer sicher. Nicht zu vergessen: Herr P. C. Fitzgerald M. A., der einen überaus reizvollen Vortrag über die Geschichte und die Gebäude von Cambridge hielt und sich unermüdlich zeigte, den ausländischen Gästen Vergangenheit und Gegenwart von Cambridge nahezubringen.

Trefftz.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Für die Tagung in Pyrmont sind die folgenden Vorträge angemeldet worden:

Freitag, den 14. September, vormittags 9 Uhr.

1. G. Schulz, Berlin. Umkehrung von Integraltransformationen.
2. H. Schaefer, Jena. Angenäherte Berechnung des kleinsten Eigenwertes zusammengesetzter Systeme.
3. L. Collatz, Berlin. Verallgemeinerung des Differenzenverfahrens für Differentialgleichungen.
4. W. Cauer, Göttingen. Topologische Dualitätssätze und Reziprozitätstheoreme der Schaltungstheorie.
5. R. Höger, Prag. Schwingungen elastischer Seile.
6. W. Quade, Karlsruhe. Schwingungsvorgänge in Systemen mit zwei Freiheitsgraden.

Nachmittags 16 Uhr.

1. H. Neuber, München. Theorie der räumlichen Kerbwirkung.
2. H. Fromm, Berlin. Zerreißversuche an Flachstäben mit ebener Formänderung.
3. H. Ebner, Berlin. Spannungszustand durch Drillung in dünnwandigen Kastenträgern bei verhinderter Endverwölbung.
4. K. Ludwig, Hannover. Einwirkung von Bodenschwingungen auf Pfeiler.

Sonnabend, den 15. September, vormittags 9 Uhr.

Mitgliederversammlung.

Anschließend:

1. W. Müller, Prag. Über einige nicht-stationäre Bewegungen von reibenden Flüssigkeiten.
2. W. Tollmien, Göttingen. Ein Instabilitätskriterium für laminare Geschwindigkeitsverteilungen.
3. H. Gebelein, Stuttgart. Zustandekommen der turbulenten Austauschgröße.
4. C. Weber, Dresden. Wellenerregung in einem Kanale durch eine bewegte Wand.
5. C. Weber, Dresden. Theoretische Ansätze für die Schulerschen Umschlagwellen.
6. G. Vogelpohl, Berlin. Über die Anwendung des Impulssatzes der Strömungslehre auf den Strahlantrieb (Raketenwirkung).

Rechenmaschinen.

Wir weisen unsere Leser darauf hin, daß in der Internationalen Büroausstellung, die vom 7. bis 16. September in Berlin stattfindet, Gelegenheit gegeben ist, die neuesten deutschen und ausländischen Rechenmaschinen kennenzulernen.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 24, Kulmstr. 1; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 21. II. Vj. D.A. 1100.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.